

Methoden der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung

In der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung werden die Gemeinkosten der Hilfskostenstellen auf die Hauptkostenstellen übertragen. Grundlage dafür sind die von den Hilfskostenstellen erbrachten Leistungen, die von den Hauptkostenstellen verbraucht werden und diesen deswegen in Rechnung gestellt werden. „In Rechnung stellen“ heißt: Die Kosten des Empfängers erhöhen sich, und die Kosten des Lieferanten vermindern sich um den gleichen Betrag. Am Ende sind alle Kosten der Hilfskostenstellen auf die Hauptkostenstellen übertragen worden; die Kosten der Hilfskostenstellen nach der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung sind null, die Kosten der Hauptkostenstellen sind entsprechend erhöht worden.

Da die Kosten der Hilfskostenstellen im System zweimal vorkommen, nämlich vor und nach der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung, müssen diese Kosten begrifflich gegeneinander abgegrenzt werden: Die Kosten einer Kostenstelle vor der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung werden primäre Gemeinkosten genannt, die Kosten, welche durch die innerbetriebliche Leistungsverrechnung hinzukommen, sind die sekundären Gemeinkosten dieser Kostenstelle. Nach der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung sind die primären Gemeinkosten der Hilfskostenstellen zu sekundären Gemeinkosten der Hauptkostenstellen geworden.

Zu diesem Ergebnis führen alle Verfahren der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung. Die Verfahren unterscheiden sich jedoch darin, wie die innerbetriebliche Leistungsverrechnung *zwischen* Hilfskostenstellen erfolgt. Hilfskostenstellen können wie alle anderen Kostenstellen ebenfalls Leistungen von Hilfskostenstellen verbrauchen, sogar ihre eigenen. Damit können sich auch die Kosten von Hilfskostenstellen durch die innerbetriebliche Leistungsverrechnung um sekundäre Gemeinkosten erhöhen, bevor diese zusammen mit den primären Gemeinkosten auf andere Kostenstellen übertragen werden. Bezeichnet man die Summe der von einer Hilfskostenstelle weiter zu belastenden Kosten als berechnete Kosten, so gilt für die berechneten Kosten einer bestimmten Hilfskostenstelle:

$$(1) \quad \text{Berechnete Kosten} = \text{Primäre Gemeinkosten} + \text{Sekundäre Gemeinkosten}$$

Die Höhe der berechneten Kosten ergibt sich aus der Anzahl der gelieferten und berechneten Leistungseinheiten, multipliziert mit den Kosten pro Leistungseinheit. Werden die Kosten pro Leistungseinheit mit k bezeichnet, so erhält man die insgesamt von einer Hilfskostenstelle in Rechnung gestellten Kosten, indem k mit den insgesamt in Rechnung gestellten Leistungseinheiten multipliziert wird. Bezeichnet man die in Rechnung gestellten Leistungseinheiten als berechnete Menge, gilt also:

$$(2) \quad \text{Berechnete Kosten} = k \cdot \text{Berechnete Menge}$$

oder

$$(3) \quad k = \frac{\text{Berechnete Kosten}}{\text{Berechnete Menge}}$$

Hierin Gleichung (1) eingesetzt:

$$(4) \quad k = \frac{\text{Primäre Gemeinkosten} + \text{Sekundäre Gemeinkosten}}{\text{Berechnete Menge}}$$

Diese Gleichung gilt unabhängig vom verwendeten Verfahren der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung. Die Verfahren unterscheiden sich in der Bestimmung der sekundären Gemeinkosten und der berechneten Menge. Je nach Verfahren werden die Hilfskostenstellen für ihren Verbrauch an eigenen oder fremden Leistungen mit Kosten belastet oder nicht. Das bedeutet für die liefernden Hilfskostenstellen, dass sie unter Umständen nicht alle produzierten Leistungseinheiten in Rechnung stellen können – wenn das Verfahren keine Belastung von Hilfskostenstellen vorsieht, werden die von Hilfskostenstellen verbrauchten Einheiten auch nicht in Rechnung gestellt.

Grundsätzlich gilt also, dass die von einer Hilfskostenstelle produzierte Menge an Leistungseinheiten unterteilt werden muss in einen Teil, der in Rechnung gestellt wird, und in einen Teil, der nicht in Rechnung gestellt wird:

$$(5) \quad \text{Produzierte Menge} = \text{Berechnete Menge} + \text{Unberechnete Menge}$$

Methoden der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung

Hieraus folgt:

$$(6) \quad \text{Berechnete Menge} = \text{Produzierte Menge} - \text{Unberechnete Menge}$$

Dies in Gleichung (4) eingesetzt:

$$(7) \quad k = \frac{\text{Primäre Gemeinkosten} + \text{Sekundäre Gemeinkosten}}{\text{Produzierte Menge} - \text{Unberechnete Menge}}$$

Damit lassen sich die verschiedenen Verfahren beschreiben:

Nach dem **Anbauverfahren** findet überhaupt keine innerbetriebliche Leistungsverrechnung zwischen Hilfskostenstellen statt. Somit erhalten die Hilfskostenstellen auch keine sekundären Gemeinkosten, und alle Lieferungen an Hilfskostenstellen bleiben unberechnet. Nach dem Anbauverfahren ist also

$$(8) \quad k = \frac{\text{Primäre Gemeinkosten}}{\text{Produzierte Menge} - \text{Alle Lieferungen an Hilfskostenstellen}}$$

Nach dem **Stufenleiterverfahren** kommt es für die innerbetriebliche Leistungsverrechnung zwischen Hilfskostenstellen auf die Rangfolge der Hilfskostenstellen an, die an ihrer Nummerierung ersichtlich ist. Jede Hilfskostenstelle belastet nur nachfolgende Kostenstellen. Die sekundären Gemeinkosten stammen also nur von Vorgängern, und die Lieferungen an Vorgänger und an sich selbst bleiben unberechnet. Der Kostensatz einer Hilfskostenstelle nach dem Stufenleiterverfahren ist deswegen

$$(9) \quad k = \frac{\text{Primäre Gemeinkosten} + \text{Sekundäre Gemeinkosten, belastet von Vorgängern}}{\text{Produzierte Menge} - \text{Lieferungen an Vorgänger und an sich selbst}}$$

Nach dem **Gleichungsverfahren** werden alle Lieferungen auch in Rechnung gestellt; es gibt also keine unberechneten Lieferungen. Jede Kostenstelle wird von allen Lieferanten für den Verbrauch ihrer Leistungen belastet. Somit gilt nach dem Gleichungsverfahren:

$$(10) \quad k = \frac{\text{Primäre Gemeinkosten} + \text{Sekundäre Gemeinkosten, belastet durch alle Hilfskostenstellen}}{\text{Produzierte Menge}}$$

Die abgeleiteten Gleichungen zeigen nicht nur, wie die Kostensätze berechnet werden, sondern sie geben auch Aufschluss über den Ablauf des Verfahrens der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung.

Betrachtet man zunächst Gleichung (8), so wird der Kostensatz einer Hilfskostenstelle nach dem Anbauverfahren durch die primären Gemeinkosten der Hilfskostenstelle, die produzierte Menge und die Lieferungen an Hilfskostenstellen bestimmt. Über alle diese Daten verfügt die Kostenstelle selbst. Das heißt, der Kostensatz einer Hilfskostenstelle kann nach dem Anbauverfahren ermittelt werden, ohne dass man hierfür die Kostensätze aus der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung anderer Hilfskostenstellen kennen muss. Der Kostensatz kann in jeder Kostenstelle unabhängig von den anderen Kostenstellen ermittelt werden.

Beim Stufenleiterverfahren ist das anders. Wie Gleichung (9) zeigt, werden zur Berechnung des Kostensatzes nicht nur die primären Gemeinkosten, die produzierte Menge und die eigenen Lieferungen benötigt, sondern auch die von den Vorgängern in der Hilfskostenstellenhierarchie belasteten sekundären Gemeinkosten. Diese beruhen auf den Kostensätzen der Vorgänger. Die Nachfolger können ihre Kostensätze also erst dann ausrechnen, wenn die Vorgänger dies getan haben, und zwar alle Vorgänger.

Beim Gleichungsverfahren nun muss jede einzelne Kostenstelle zur Bestimmung ihres eigenen Kostensatzes die Kostensätze aller anderen Kostenstellen kennen, und ihren eigenen – zur Bewertung des Eigenverbrauchs – auch. Das heißt, die Kostensätze aller Hilfskostenstellen müssen gleichzeitig bestimmt werden. Hierzu stellt man Gleichungen für die Kostensätze auf und löst diese simultan. Daher erklärt sich die Bezeichnung des Verfahrens als Gleichungsverfahren.

Ohne Gleichungen lassen sich aber die Kostensätze bei den anderen Verfahren auch nicht ermitteln. Der Unterschied besteht nur darin, dass beim Anbauverfahren die Gleichungen unabhängig voneinander gelöst werden können. Beim Stufenleiterverfahren kann nur die erste Hilfskostenstellen ihren

Methoden der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung

Kostensatz unabhängig von den anderen bestimmen, während die zweite Kostenstelle den Kostensatz der ersten benötigt, die dritte den der zweiten und der ersten und so weiter.

Für die allgemeine Formulierung dieser Gleichungen sei definiert:

- n = Anzahl der Hilfskostenstellen
- i = 1 .. n, Index für Hilfskostenstellen
- j = 1 .. n, Index für Hilfskostenstellen
- KP_i = Primäre Gemeinkosten der Hilfskostenstelle i
- x_i = Leistung der Hilfskostenstelle i [ME]
- k_i = Kosten pro Leistungseinheit der Hilfskostenstelle i
- $q_{i,j}$ = Lieferungen an Hilfskostenstelle i von Hilfskostenstelle j [ME]
- $q_{j,i}$ = Lieferungen an Hilfskostenstelle j von Hilfskostenstelle i [ME]

Nach dem Anbauverfahren gilt für den Kostensatz der Hilfskostenstelle i:

$$(11) \quad k_i = \frac{KP_i}{x_i - \sum_j q_{j,i}}$$

Beim Stufenleiterverfahren erhält nur die erste Hilfskostenstelle keine sekundären Gemeinkosten, da sie keine Vorgänger hat. Für die Hilfskostenstelle 1 gilt deswegen nach dem Stufenleiterverfahren:

$$(12) \quad k_1 = \frac{KP_1}{x_1 - q_{1,1}}$$

Die Kostensätze der Hilfskostenstellen mit der laufenden Nummer $i > 1$ ergeben sich nach dem Stufenleiterverfahren aus der Lösung folgender Gleichungen:

$$(13) \quad k_i = \frac{KP_i + \sum_{j=1}^{i-1} k_j \cdot q_{i,j}}{x_i - \sum_{j=1}^i q_{j,i}}$$

Für das Gleichungsverfahren gilt

$$(14) \quad k_i = \frac{KP_i + \sum_j k_j \cdot q_{i,j}}{x_i}$$

Nachdem man die Gleichungen gelöst hat, werden die gefundenen Kostensätze entsprechend dem jeweiligen Verfahren für die Kostenverrechnung verwendet. Die zu berechnenden Leistungen werden mit ihrem Kostensatz multipliziert und den empfangenden Kostenstellen in Rechnung gestellt. Beim Anbauverfahren sind dies, wie bereits gesagt, nur die Hauptkostenstellen, beim Stufenleiterverfahren alle in der Rangfolge nachgelagerten Kostenstellen und beim Gleichungsverfahren alle Kostenstellen.

Zweifellos ist das Gleichungsverfahren dasjenige, welches dem Prinzip der verursachungsgerechten Kostenzurechnung am besten entspricht, allein aus dem Grunde, weil es bei diesem Verfahren keine unberechneten Leistungen gibt. Zwar müssen bei jedem Verfahren am Ende die Hauptkostenstellen alles bezahlen, aber man mag die genaueste Kostenverteilung auch als die gerechteste empfinden.

Abschließend sei noch die eingangs aufgestellte und soeben wiederholte Behauptung bewiesen, die primären Gemeinkosten der Hilfskostenstellen seien nach der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung vollständig auf die Hauptkostenstellen übertragen worden. Zwar ist dies das Ziel der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung. Jedoch soll die Übertragung der Kosten dadurch erfolgen, dass die berechneten Leistungseinheiten mit einem bestimmten Kostensatz bewertet werden, der für das ganze Unternehmen einheitlich ist. Dann muss der Kostensatz so bemessen sein, dass auch tatsächlich alle primären Gemeinkosten von den Hilfskostenstellen auf die Hauptkostenstellen übertragen werden und keine Gemeinkosten mehr auf den Hilfskostenstellen verbleiben.

Methoden der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung

Für alle Hilfskostenstellen insgesamt muss also gelten, dass die Summe ihrer Lieferungen an Hauptkostenstellen, multipliziert mit dem jeweiligen Kostensatz, die Summe der primären Gemeinkosten aller Hilfskostenstellen ergibt.

Produziert wird nun von der Hilfskostenstelle i die Menge x_i . Von dieser Menge wird ein Teil in Hilfskostenstellen verbraucht (nicht unbedingt berechnet), und nur der restliche Teil der Leistungseinheiten wird an die Hauptkostenstellen geliefert und diesen auch berechnet. Von der Menge x_i bleibt also für die Hauptkostenstellen übrig:

$$x_i - \sum_j q_{j,i}$$

Die von der Hilfskostenstelle i an Hauptkostenstellen berechnete Summe ist also

$$k_i \cdot \left(x_i - \sum_j q_{j,i} \right)$$

Summiert man diesen Betrag für alle Hilfskostenstellen, so müssen diese übertragenen Kosten gleich der Summe aller primären Gemeinkosten der Hilfskostenstellen sein. Es muss gelten:

$$(15) \quad \sum_i k_i \cdot \left(x_i - \sum_j q_{j,i} \right) = \sum_i KP_i$$

Ob die abgeleiteten Kostensätze diese Bedingung erfüllen, wird im Folgenden überprüft. Es versteht sich, dass jeder Kostensatz auf sein Verfahren anzuwenden ist, für das er abgeleitet wurde. Auf eine entsprechende Indizierung wird hier aber verzichtet. Ob der Kostensatz k_i für das Anbauverfahren, das Stufenleiterverfahren oder das Gleichungsverfahren gilt, geht aus dem Kontext hervor.

Für das Anbauverfahren ergibt die Umstellung von Gleichung (11) und die Summierung über alle Hilfskostenstellen:

$$\sum_i k_i \cdot \left(x_i - \sum_j q_{j,i} \right) = \sum_i KP_i$$

Dies ist identisch mit Gleichung (15), womit die aufgestellte Behauptung unmittelbar bewiesen ist.

Nach dem Stufenleiterverfahren ergeben sich die primären Gemeinkosten der Hilfskostenstelle 1 aus Gleichung (12). Es gilt:

$$(16) \quad KP_1 = k_1 \cdot (x_1 - q_{1,1})$$

Für die Hilfskostenstelle i mit $i > 1$ folgt aus Gleichung (13)

$$(17) \quad KP_i = k_i \cdot \left(x_i - \sum_{j=1}^i q_{j,i} \right) - \sum_{j=1}^{i-1} k_j \cdot q_{i,j}$$

Um hieraus die primären Gemeinkosten aller Hilfskostenstellen mit der laufenden Nummer $i > 1$ zu erhalten, muss von $i = 2$ bis n summiert werden:

$$(18) \quad \sum_{i=2}^n KP_i = \sum_{i=2}^n k_i \cdot \left(x_i - \sum_{j=1}^i q_{j,i} \right) - \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} k_j \cdot q_{i,j}$$

Die Addition der Gleichungen (16) und (18) ergibt die Summe der primären Gemeinkosten aller Hilfskostenstellen:

$$(19) \quad \sum_i KP_i = k_1 \cdot (x_1 - q_{1,1}) + \sum_{i=2}^n k_i \cdot \left(x_i - \sum_{j=1}^i q_{j,i} \right) - \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} k_j \cdot q_{i,j}$$

Methoden der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung

Löst man die Klammern auf, lassen sich Ansätze zur Vereinfachung dieses unhandlichen Ausdrucks erkennen:

$$(20) \quad \sum_i KP_i = k_1 \cdot x_1 - k_1 \cdot q_{1,1} + \sum_{i=2}^n k_i \cdot x_i - \sum_{i=2}^n k_i \cdot \sum_{j=1}^i q_{j,i} - \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} k_j \cdot q_{i,j}$$

Hierin ist $k_1 \cdot x_1 + \sum_{i=2}^n k_i \cdot x_i = \sum_i k_i \cdot x_i$, sodass:

$$(21) \quad \sum_i KP_i = \sum_i k_i \cdot x_i - k_1 \cdot q_{1,1} - \sum_{i=2}^n k_i \cdot \sum_{j=1}^i q_{j,i} - \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} k_j \cdot q_{i,j}$$

Es ist nun zu zeigen, dass die so definierten primären Gemeinkosten der Hilfskostenstellen genau so hoch sind wie die den Hauptkostenstellen berechneten Gemeinkosten. Diese werden durch die linke Seite von Gleichung (15) definiert. Es muss also bewiesen werden, dass die linke Seite von Gleichung (15) identisch ist mit der rechten Seite von Gleichung (21), dass also gilt:

$$(22) \quad \sum_i k_i \cdot \left(x_i - \sum_j q_{j,i} \right) = \sum_i k_i \cdot x_i - k_1 \cdot q_{1,1} - \sum_{i=2}^n k_i \cdot \sum_{j=1}^i q_{j,i} - \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} k_j \cdot q_{i,j}$$

Löst man auf der linken Seite dieses Ausdrucks (dass es eine Gleichung ist, muss ja gerade bewiesen werden) die Klammer auf, erhält man

$$(23) \quad \sum_i k_i \cdot x_i - \sum_i k_i \cdot \sum_j q_{j,i} = \sum_i k_i \cdot x_i - k_1 \cdot q_{1,1} - \sum_{i=2}^n k_i \cdot \sum_{j=1}^i q_{j,i} - \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} k_j \cdot q_{i,j}$$

Beide Seiten stimmen also zumindest in dem Ausdruck $\sum_i k_i \cdot x_i$ überein. Es wäre dann nur noch zu zeigen, dass die Abzugsposten auf beiden Seiten einander gleich sind. Dies ist der Fall, wenn die folgende Gleichung gültig ist:

$$(24) \quad \sum_i k_i \cdot \sum_j q_{j,i} = k_1 \cdot q_{1,1} + \sum_{i=2}^n k_i \cdot \sum_{j=1}^i q_{j,i} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} k_j \cdot q_{i,j}$$

Zum Beweis dessen werden die Elemente von Ausdruck (24) explizit dargestellt. Es gilt für die linke Seite:

$$\begin{aligned} \sum_i k_i \cdot \sum_j q_{j,i} = & k_1 \cdot (q_{1,1} + q_{2,1} + q_{3,1} \dots + q_{n,1}) \\ & + k_2 \cdot (q_{1,2} + q_{2,2} + q_{3,2} \dots + q_{n,2}) \\ & + k_3 \cdot (q_{1,3} + q_{2,3} + q_{3,3} \dots + q_{n,3}) \\ & \vdots \\ & + k_{n-1} \cdot (q_{1,n-1} + q_{2,n-1} + q_{3,n-1} \dots + q_{n,n-1}) \\ & + k_n \cdot (q_{1,n} + q_{2,n} + q_{3,n} \dots + q_{n,n}) \end{aligned}$$

Für die rechte Seite ergibt sich:

$$\begin{aligned} k_1 \cdot q_{1,1} + \sum_{i=2}^n k_i \cdot \sum_{j=1}^i q_{j,i} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} k_j \cdot q_{i,j} = & k_1 \cdot q_{1,1} \\ & + k_2 \cdot (q_{1,2} + q_{2,2}) \\ & + k_3 \cdot (q_{1,3} + q_{2,3} + q_{3,3}) \\ & \vdots \\ & + k_{n-1} \cdot (q_{1,n-1} + q_{2,n-1} + q_{3,n-1} \dots + q_{n-1,n-1}) \end{aligned}$$

Methoden der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung

$$\begin{aligned}
 &+ k_n \cdot (q_{1,n} + q_{2,n} + q_{3,n} \dots + q_{n,n}) \\
 &+ k_1 \cdot q_{2,1} \\
 &+ k_1 \cdot q_{3,1} + k_2 \cdot q_{3,2} \\
 &+ k_1 \cdot q_{4,1} + k_2 \cdot q_{4,2} + k_3 \cdot q_{4,3} \\
 &\vdots \\
 &+ k_1 \cdot q_{n,1} + k_2 \cdot q_{n,2} + k_3 \cdot q_{n,3} \dots + k_{n-1} \cdot q_{n,n-1}
 \end{aligned}$$

Es ist zweckmäßig, in diesem Ausdruck die Klammern aufzulösen, sodass:

$$\begin{aligned}
 k_1 \cdot q_{1,1} + \sum_{i=2}^n k_i \cdot \sum_{j=1}^i q_{j,i} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} k_j \cdot q_{i,j} = & k_1 \cdot q_{1,1} \\
 &+ k_2 \cdot q_{1,2} + k_2 \cdot q_{2,2} \\
 &+ k_3 \cdot q_{1,3} + k_3 \cdot q_{2,3} + k_3 \cdot q_{3,3} \\
 &\vdots \\
 &+ k_{n-1} \cdot q_{1,n-1} + k_{n-1} \cdot q_{2,n-1} + k_{n-1} \cdot q_{3,n-1} \dots + k_{n-1} \cdot q_{n-1,n-1} \\
 &+ k_n \cdot q_{1,n} + k_n \cdot q_{2,n} + k_n \cdot q_{3,n} \dots + k_n \cdot q_{n,n} \\
 &+ k_1 \cdot q_{2,1} \\
 &+ k_1 \cdot q_{3,1} + k_2 \cdot q_{3,2} \\
 &+ k_1 \cdot q_{4,1} + k_2 \cdot q_{4,2} + k_3 \cdot q_{4,3} \\
 &\vdots \\
 &+ k_1 \cdot q_{n,1} + k_2 \cdot q_{n,2} + k_3 \cdot q_{n,3} \dots + k_{n-1} \cdot q_{n,n-1}
 \end{aligned}$$

Fasst man die Elemente dieses Ausdrucks nach k_1, k_2 usw. zeilenweise zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned}
 k_1 \cdot q_{1,1} + \sum_{i=2}^n k_i \cdot \sum_{j=1}^i q_{j,i} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} k_j \cdot q_{i,j} = & k_1 \cdot q_{1,1} + k_1 \cdot q_{2,1} + k_1 \cdot q_{3,1} \dots + k_1 \cdot q_{n,1} \\
 &+ k_2 \cdot q_{1,2} + k_2 \cdot q_{2,2} + k_2 \cdot q_{3,2} \dots + k_2 \cdot q_{n,2} \\
 &+ k_3 \cdot q_{1,3} + k_3 \cdot q_{2,3} + k_3 \cdot q_{3,3} \dots + k_3 \cdot q_{n,3} \\
 &\vdots \\
 &+ k_{n-1} \cdot q_{1,n-1} + k_{n-1} \cdot q_{2,n-1} + k_{n-1} \cdot q_{3,n-1} \dots + k_{n-1} \cdot q_{n,n-1} \\
 &+ k_n \cdot q_{1,n} + k_n \cdot q_{2,n} + k_n \cdot q_{3,n} \dots + k_n \cdot q_{n,n}
 \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite lässt sich jeweils k_i ausklammern:

$$\begin{aligned}
 k_1 \cdot q_{1,1} + \sum_{i=2}^n k_i \cdot \sum_{j=1}^i q_{j,i} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} k_j \cdot q_{i,j} = & k_1 \cdot (q_{1,1} + q_{2,1} + q_{3,1} \dots + q_{n,1}) \\
 &+ k_2 \cdot (q_{1,2} + q_{2,2} + q_{3,2} \dots + q_{n,2}) \\
 &+ k_3 \cdot (q_{1,3} + q_{2,3} + q_{3,3} \dots + q_{n,3}) \\
 &\vdots \\
 &+ k_{n-1} \cdot (q_{1,n-1} + q_{2,n-1} + q_{3,n-1} \dots + q_{n,n-1}) \\
 &+ k_n \cdot (q_{1,n} + q_{2,n} + q_{3,n} \dots + q_{n,n})
 \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieses Ausdrucks ist aber nichts anderes als $\sum_i k_i \cdot \sum_j q_{j,i}$, sodass gilt:

Methoden der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung

$$k_1 \cdot q_{1,1} + \sum_{i=2}^n k_i \cdot \sum_{j=1}^i q_{j,i} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} k_j \cdot q_{i,j} = \sum_i k_i \cdot \sum_j q_{j,i}$$

Das ist Gleichung (24), womit deren Richtigkeit bewiesen ist.

Damit kann Gleichung (24) in Gleichung (21) eingesetzt werden:

$$\sum_i KP_i = \sum_i k_i \cdot x_i - \sum_i k_i \sum_j q_{j,i}$$

Klammert man auf der rechten Seite dieser Gleichung $\sum_i k_i$ aus und vertauscht die Seiten, erhält man

$$\sum_i k_i \cdot \left(x_i - \sum_j q_{j,i} \right) = \sum_i KP_i$$

Das ist Gleichung (15). Damit ist die Behauptung bewiesen. Auch beim Stufenleiterverfahren werden die primären Gemeinkosten der Hilfskostenstellen vollständig auf die Hauptkostenstellen übertragen.

Für das Gleichungsverfahren folgt aus Gleichung (14):

$$(25) \quad KP_i = k_i \cdot x_i - \sum_j k_j \cdot q_{i,j}$$

Die Summierung über alle Hilfskostenstellen ergibt:

$$(26) \quad \sum_i KP_i = \sum_i k_i \cdot x_i - \sum_i \sum_j k_j \cdot q_{i,j}$$

Die primären Gemeinkosten der Hilfskostenstellen müssen nun auch beim Gleichungsverfahren in voller Höhe als sekundäre Gemeinkosten auf die Hauptkostenstellen übertragen werden. Die sekundären Gemeinkosten der Hauptkostenstellen sind nach Gleichung (15)

$$\sum_i k_i \cdot \left(x_i - \sum_j q_{j,i} \right)$$

Diese Kosten müssen den primären Gemeinkosten gemäß Gleichung (26) entsprechen. Es ist also zu zeigen, dass gilt:

$$\sum_i k_i \cdot \left(x_i - \sum_j q_{j,i} \right) = \sum_i k_i \cdot x_i - \sum_i \sum_j k_j \cdot q_{i,j}$$

Löst man in dieser zu beweisenden Gleichung die Klammer auf, so erhält man

$$\sum_i k_i \cdot x_i - \sum_i k_i \cdot \sum_j q_{j,i} = \sum_i k_i \cdot x_i - \sum_i \sum_j k_j \cdot q_{i,j}$$

Wieder stimmen die beiden Seiten des Ausdrucks in $\sum_i k_i \cdot x_i$ überein, sodass nur noch zu untersuchen ist, ob die Gleichung

$$(27) \quad \sum_i k_i \cdot \sum_j q_{j,i} = \sum_i \sum_j k_j \cdot q_{i,j}$$

gilt.

Der Ausdruck $q_{j,i}$ auf der linken Seite stellt die Lieferungen der Hilfskostenstelle i an die Hilfskostenstelle j dar. Summiert man dies für die Hilfskostenstelle i über alle j , so erhält man mit $\sum_j q_{j,i}$ die

Summe der Lieferungen von Hilfskostenstelle i an alle Hilfskostenstellen. Multipliziert mit dem Kosten-

Methoden der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung

satz k_i der Hilfskostenstelle i erhält man den Wert der Lieferungen dieser Hilfskostenstelle an alle Hilfskostenstellen, $k_i \cdot \sum_j q_{j,i}$. Summiert man dies über alle Hilfskostenstellen i , dann stellt $\sum_i k_i \cdot \sum_j q_{j,i}$ den Wert aller Lieferungen an Hilfskostenstellen dar. Da die Kosten der Hilfskostenstellen sich jeweils um den Wert ihrer berechneten Lieferungen vermindern und beim Gleichungsverfahren alle Lieferungen auch berechnet werden, vermindern sich ihre Kosten insgesamt um den Wert aller ihrer Lieferungen an Hilfskostenstellen.

Andererseits hat jede Lieferung einen Empfänger, und dessen Kosten erhöhen sich. Da beim Gleichungsverfahren grundsätzlich alle Hilfskostenstellen sowohl Empfänger als auch Lieferanten sind, kann man die Kostenerhöhungen der Hilfskostenstelle i betrachten und diese über alle i summieren. Die Kostenerhöhung der Hilfskostenstelle i durch die Hilfskostenstelle j ist $k_j \cdot q_{i,j}$. Summiert über alle j erhält man mit $\sum_j k_j \cdot q_{i,j}$ die Kostenerhöhung der Hilfskostenstelle i durch alle Hilfskostenstellen. Dies wiederum summiert über alle i ist die Summe aller Kostenerhöhungen der Hilfskostenstellen durch alle Hilfskostenstellen $\sum_i \sum_j k_j \cdot q_{i,j}$, die rechte Seite der behaupteten Gleichung (27).

Auf der linken Seite von (27) steht also die Summe aller Kostenvermindernungen durch Lieferungen an Hilfskostenstellen, und auf der rechten Seite die Summe aller Kostenerhöhungen von Hilfskostenstellen durch den Verbrauch der ihnen gelieferten Leistungen. Da jeder Kostenbelastung der verbrauchenden Hilfskostenstelle eine gleich hohe Kostenentlastung der liefernden Hilfskostenstelle gegenübersteht, muss die Summe aller Kostenerhöhungen der Hilfskostenstellen gleich der Summe aller Kostenvermindernungen durch Hilfskostenstellen sein. Es gilt also:

$$\sum_i k_i \cdot \sum_j q_{j,i} = \sum_i \sum_j k_j \cdot q_{i,j}$$

Damit ist (27) in der Tat eine Gleichung. Man kann nun (27) in Gleichung (26) einsetzen und erhält

$$\sum_i KP_i = \sum_i k_i \cdot x_i - \sum_i k_i \cdot \sum_j q_{j,i}$$

Auf der rechten Seite $\sum_i k_i$ ausgeklammert und die Seiten vertauscht:

$$\sum_i k_i \cdot \left(x_i - \sum_j q_{j,i} \right) = \sum_i KP_i$$

Das ist Gleichung (15). Somit wurde auch für das Gleichungsverfahren nachgewiesen, dass durch die innerbetriebliche Leistungsverrechnung die primären Gemeinkosten der Hilfskostenstellen auf die Hauptkostenstellen übertragen werden.

Die Richtigkeit der vorstehenden Beweisführung sei nun an einem praktischen Beispiel überprüft.

Es gelte:

n	=	3	Anzahl der Hilfskostenstellen
i	=	1, 2, 3	Index für Hilfskostenstellen
j	=	1, 2, 3	Index für Hilfskostenstellen
KP_1	=	1.000,00	Primäre Gemeinkosten der Hilfskostenstelle 1
KP_2	=	500,00	Primäre Gemeinkosten der Hilfskostenstelle 2
KP_3	=	800,00	Primäre Gemeinkosten der Hilfskostenstelle 3
x_1	=	500	Leistung der Hilfskostenstelle 1 [ME]
x_2	=	200	Leistung der Hilfskostenstelle 2 [ME]
x_3	=	100	Leistung der Hilfskostenstelle 3 [ME]
$q_{1,1}$	=	70	Lieferungen an Hilfskostenstelle 1 von Hilfskostenstelle 1 [ME]
$q_{1,2}$	=	50	Lieferungen an Hilfskostenstelle 1 von Hilfskostenstelle 2 [ME]
$q_{1,3}$	=	5	Lieferungen an Hilfskostenstelle 1 von Hilfskostenstelle 3 [ME]

Methoden der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung

$q_{2,1}$	=	20	Lieferungen an Hilfskostenstelle 2 von Hilfskostenstelle 1 [ME]
$q_{2,2}$	=	40	Lieferungen an Hilfskostenstelle 2 von Hilfskostenstelle 2 [ME]
$q_{2,3}$	=	5	Lieferungen an Hilfskostenstelle 2 von Hilfskostenstelle 3 [ME]
$q_{3,1}$	=	40	Lieferungen an Hilfskostenstelle 3 von Hilfskostenstelle 1 [ME]
$q_{3,2}$	=	100	Lieferungen an Hilfskostenstelle 3 von Hilfskostenstelle 2 [ME]
$q_{3,3}$	=	20	Lieferungen an Hilfskostenstelle 3 von Hilfskostenstelle 3 [ME]

Die Verfahren der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung werden nacheinander auf diesen Fall angewendet und es wird dann überprüft, ob alle primären Gemeinkosten der Hilfskostenstellen auf die Hauptkostenstellen übertragen worden sind.

Dazu müssen die Kostensätze des jeweiligen Verfahrens ermittelt werden. Für das **Anbauverfahren** ergibt sich nach Gleichung (8) oder (11):

$$(28) \quad k_1 = \frac{KP_1}{x_1 - q_{1,1} - q_{2,1} - q_{3,1}} = \frac{1.000,00}{500 - 70 - 20 - 40} = \frac{1.000,00}{370} = 2,702703$$

$$(29) \quad k_2 = \frac{KP_2}{x_2 - q_{1,2} - q_{2,2} - q_{3,2}} = \frac{500,00}{200 - 50 - 40 - 100} = \frac{500}{10} = 50,000000$$

$$(30) \quad k_3 = \frac{KP_3}{x_3 - q_{1,3} - q_{2,3} - q_{3,3}} = \frac{800,00}{100 - 5 - 5 - 20} = \frac{800,00}{70} = 11,428571$$

Multipliziert man nun die Lieferungen der Hilfskostenstellen an die Hauptkostenstellen mit dem jeweiligen Kostensatz, so muss die Summe die primären Gemeinkosten der Hilfskostenstellen ergeben, nämlich

$$KP_1 + KP_2 + KP_3 = 1.000,00 + 500,00 + 800,00 = 2.300,00$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned} & k_1(x_1 - q_{1,1} - q_{2,1} - q_{3,1}) + k_2(x_2 - q_{1,2} - q_{2,2} - q_{3,2}) + k_3(x_3 - q_{1,3} - q_{2,3} - q_{3,3}) \\ &= 2,702703 \cdot 370 + 50,000000 \cdot 10 + 11,428571 \cdot 70 = 2.300,00 \end{aligned}$$

Für das **Stufenleiterverfahren** gilt nach Gleichung (9) oder (12) und (13):

$$(31) \quad k_1 = \frac{KP_1}{x_1 - q_{1,1}} = \frac{1.000,00}{500 - 70} = \frac{1.000,00}{430} = 2,325581$$

$$(32) \quad k_2 = \frac{KP_2 + k_1 \cdot q_{2,1}}{x_2 - q_{1,2} - q_{2,2}} = \frac{500,00 + 2,325581 \cdot 20}{200 - 50 - 40} = \frac{546,51162}{110} = 4,968287$$

$$(33) \quad k_3 = \frac{KP_3 + k_1 \cdot q_{3,1} + k_2 \cdot q_{3,2}}{x_3 - q_{1,3} - q_{2,3} - q_{3,3}} = \frac{800,00 + 2,325581 \cdot 40 + 4,968287 \cdot 100}{100 - 5 - 5 - 20} = \frac{1.389,85194}{70} = 19,855028$$

An die Hauptkostenstellen wird auf Basis dieser Kostensätze geliefert und berechnet:

$$\begin{aligned} & k_1(x_1 - q_{1,1} - q_{2,1} - q_{3,1}) + k_2(x_2 - q_{1,2} - q_{2,2} - q_{3,2}) + k_3(x_3 - q_{1,3} - q_{2,3} - q_{3,3}) \\ &= 2,325581 \cdot 370 + 4,968287 \cdot 10 + 19,855028 \cdot 70 = 2.300,00 \end{aligned}$$

Auch hier wird, wie es zu erwarten war, die Summe der primären Gemeinkosten von den Hilfskostenstellen auf die Hauptkostenstellen übertragen.

Nach dem **Gleichungsverfahren** ist entsprechend Gleichung (10) oder (14) folgendes Gleichungssystem simultan nach k_1 , k_2 und k_3 aufzulösen:

Methoden der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung

$$(34) \quad k_1 = \frac{KP_1 + k_1 \cdot q_{1,1} + k_2 \cdot q_{1,2} + k_3 \cdot q_{1,3}}{x_1}$$

$$(35) \quad k_2 = \frac{KP_2 + k_1 \cdot q_{2,1} + k_2 \cdot q_{2,2} + k_3 \cdot q_{2,3}}{x_2}$$

$$(36) \quad k_3 = \frac{KP_3 + k_1 \cdot q_{3,1} + k_2 \cdot q_{3,2} + k_3 \cdot q_{3,3}}{x_3}$$

Die konkreten Daten eingesetzt, soweit dies ohne Lösung des Gleichungssystems möglich ist:

$$(37) \quad k_1 = \frac{1.000,00 + 70k_1 + 50k_2 + 5k_3}{500}$$

$$(38) \quad k_2 = \frac{500,00 + 20k_1 + 40k_2 + 5k_3}{200}$$

$$(39) \quad k_3 = \frac{800,00 + 40k_1 + 100k_2 + 20k_3}{100}$$

Die Lösung ist

$$k_1 = 2,984293$$

$$k_2 = 4,013962$$

$$k_3 = 16,509599$$

Werden die Lieferungen der Hilfskostenstellen an die Hauptkostenstellen mit diesen Kostensätzen bewertet, ergibt sich wieder die Summe der primären Gemeinkosten der Hilfskostenstellen, die zu den sekundären Gemeinkosten der Hauptkostenstellen geworden sind:

$$\begin{aligned} & k_1(x_1 - q_{1,1} - q_{2,1} - q_{3,1}) + k_2(x_2 - q_{1,2} - q_{2,2} - q_{3,2}) + k_3(x_3 - q_{1,3} - q_{2,3} - q_{3,3}) \\ &= 2,984293 \cdot 370 + 4,013962 \cdot 10 + 16,509599 \cdot 70 = 2.300,00 \end{aligned}$$