Die Summe von Binomialkoeffizienten

Für eine nichtnegative ganze Zahl *n* gilt

(1)
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

Beweis

Mit $k=0\ldots n$ ist die Definition des Binomialkoeffizienten

(2)
$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

Für den trivialen Fall $n=0$ nimmt *k* nur den Wert 0 an und die Summe nach Gleichung (1) ist

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{0}=\binom{0}{0}=\frac{0!}{(0-0)!\cdot 0!}$$

Mit der für diesen Fall entwickelten Definition $0!=1$ ergibt sich $\frac{0!}{(0-0)!\cdot 0!}=1$. Diesen Wert für die linke Seite von Gleichung (1) erhält man auch, wenn in die rechte Seite $n=0$ eingesetzt wird, denn es ist $2^0=1$. Die rechte und die linke Seite von Gleichung (1) stimmen also überein, und die Behauptung ist für diesen Fall bewiesen.

Für $n=1$ ergibt die linke Seite von Gleichung (1)

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}=\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=\frac{1!}{(1-0)!\cdot 0!}+\frac{1!}{(1-1)!\cdot 1!}=1+1=2$$

Die rechte Seite ist $2^1=2$, womit die Behauptung auch für den Fall $n=1$ richtig ist.

Für $n=2$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}=\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=\frac{2!}{2!\cdot 0!}+\frac{2!}{1!\cdot 1!}+\frac{2!}{0!\cdot 2!}=1+2+1=4=2^2=2^n$$

Auch in diesem Fall ist also die Summe der Binomialkoeffizienten 2^n. Die aufgestellte Behauptung ist damit für die Fälle $n=0$, $n=1$ und $n=2$ bewiesen.

Für $n>2$ lautet die explizite Formulierung der Summe von Binomialkoeffizienten

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\ldots+\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!\cdot 0!}+\frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!}+\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}\ldots+\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}+\frac{n!}{1!\cdot(n-1)!}+\frac{n!}{0!\cdot n!}$$

Man sieht hier zunächst, dass wegen $k!\cdot(n-k)!=(n-k)!\cdot k!$ die Reihe der Binomialkoeffizienten symmetrisch aufgebaut ist; das heißt, das erste und das letzte Element stimmen überein, das zweite und das vorletzte, usw.

Das erste und das letzte Glied der Reihe von Binomialkoeffizienten ist wegen $0!=1$ stets

$$\frac{n!}{n!\cdot 0!}=\frac{n!}{0!\cdot n!}=\frac{n!}{n!\cdot 1}=\frac{n!}{1\cdot n!}=1$$

In den bisher bewiesenen Fällen nun hat sich die Summe der Binomialkoeffizienten jeweils verdoppelt, wenn *n* um 1 erhöht wurde: Für $n=0$ ist die Summe der Binomialkoeffizienten 1, bei $n=1$ verdoppelt sie sich auf 2, und bei $n=2$ ist die Summe mit 4 wieder doppelt so hoch. Die Frage ist, ob dies allgemein gilt. Dies wäre der Fall, wenn die Erhöhung von *n* um 1 die Summe der Binomialkoeffizienten verdoppelte, wenn also gälte

Die Summe von Binomialkoeffizienten

(3) $$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

Um die Richtigkeit dieser Gleichung nachzuweisen, wird der letzte Summand des Ausdrucks auf der linken Seite explizit formuliert, sodass die Summation gemäß dem Summenzeichen nur noch bis *n* geht:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}+\binom{n+1}{n+1}$$

Aus der Summe $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}$ wird nun der erste Summand herausgenommen und explizit formuliert. Für den ersten Summanden gilt $k = 0$, womit das Summationszeichen bei $k = 1$ beginnt:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}=\binom{n+1}{0}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}+\binom{n+1}{n+1}$$

Für das erste und das letzte Glied dieser Reihe gilt, dass deren Wert jeweils 1 ist, sodass man auch schreiben kann

(4) $$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}=1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}+1$$

Von der Summe $\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}$ wird das Element $\binom{n+1}{k}$ gesondert betrachtet und explizit formuliert. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!\cdot k!}\\
&= \frac{n!\cdot(n+1)}{(n-k+1)\cdot(n-k)!\cdot k!}\\
&= \frac{n!\cdot(k+n-k+1)}{(n-k+1)\cdot(n-k)!\cdot k!}\\
&= \frac{n!\cdot k+n!\cdot(n-k+1)}{(n-k+1)\cdot(n-k)!\cdot k!}\\
&= \frac{n!\cdot k}{(n-k+1)\cdot(n-k)!\,k!}+\frac{n!\cdot(n-k+1)}{(n-k+1)\cdot(n-k)!\cdot k!}\\
&= \frac{n!\cdot k}{(n-k+1)!\cdot k!}+\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\\
&= \frac{n!}{(n-k+1)!\cdot(k-1)!}+\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\\
&= \binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Es gilt also

(5) $$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$$

Damit kann Gleichung (4) auch folgendermaßen geschrieben werden:

Die Summe von Binomialkoeffizienten

(6)
$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}+1$$

Die in Gleichung (6) enthaltene Summe $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}$ hat als ersten Summanden $\binom{n}{1-1}=\binom{n}{0}$. Der letzte Summand ist $\binom{n}{n-1}$. Die Summe lautet also explizit

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1} = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\ldots+\binom{n}{n-1}$$

Dies lässt sich auch als Summe von $\binom{n}{k}$ darstellen, wenn k die Werte von 0 bis $n-1$ annimmt, denn es ist ebenfalls

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\ldots+\binom{n}{n-1}$$

In Gleichung (6) kann also $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}$ durch $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}$ ersetzt werden:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = 1+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}+1 = 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}+1$$

Da gilt $\binom{n}{0}=1$ und $\binom{n}{n}=1$, lässt sich diese Gleichung auch schreiben als

(7)
$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n}{0}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}+\binom{n}{n}$$

Nun ist

$$\binom{n}{0}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\ldots+\binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

und

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}+\binom{n}{n} = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

Beides in Gleichung (7) eingesetzt:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

Das ist Gleichung (3), womit diese bewiesen ist. Es gilt also für jedes n, dass die Erhöhung von n um 1 die Summe der Binomialkoeffizienten verdoppelt.

Aus Gleichung (3) folgt

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = 2\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

und

Die Summe von Binomialkoeffizienten

$$\frac{\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}}{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}} = 2$$

Gesucht ist nun eine Funktion, deren Funktionswert sich jeweils verdoppelt, wenn die unabhängige Variable n um 1 erhöht wird.

Dass 2^n diese Funktion ist, wurde bereits für $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$ nachgewiesen. Für $n + 1$ gilt

$$\frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

Die Funktion 2^n hat also für jedes n die erforderliche Eigenschaft, den Funktionswert zu verdoppeln, wenn n auf $n + 1$ erhöht wird. Die Summe der Binomialkoeffizienten lässt sich somit durch diese Funktion darstellen; es ist

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Das ist Gleichung (1), womit diese Behauptung bewiesen ist.

Es sei darauf hingewiesen, dass der Beweis viel einfacher geführt werden kann, wenn man zuvor den binomischen Lehrsatz bewiesen hat. Der binomische Lehrsatz lautet

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Setzt man hierin $a = 1$ und $b = 1$, so erhält man Gleichung (1) unmittelbar:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Warum dies so einfach geht, liegt daran, dass der binomische Lehrsatz dazu dient, die Summe eines potenzierten Binoms zu ermitteln, den Wert von $(a+b)^n$. Die Summanden eines potenzierten Binoms sind die Produkte $a^{n-k} \cdot b^k$. Die Faktoren, welche die zu summierenden Produkte bilden, sind nur a und b. Wenn nun a und b gleich 1 gesetzt werden, trägt jedes Produkt nur mit dem Wert 1 zur Summe bei. Der Wert einer Summe, deren Summanden nur Einsen sind, ist dann aber nichts anderes als die Anzahl der Summanden. Die Frage nach der Anzahl der Summanden ist indessen auch die Frage, welche die Summe der Binomialkoeffizienten beantwortet. Deswegen sind beide Antworten gleich.

Warum die Summe gerade 2^n beträgt, lässt sich aus dem Bildungsgesetz eines potenzierten Binoms erklären. Mit $(a+b)^n$ ist vorgeschrieben, aus n Klammern jeweils ein Element a oder b miteinander zu einem Produkt zu kombinieren. Da es n Klammern gibt, aus denen eine Auswahl zu treffen ist, besteht jedes Produkt aus n Faktoren. Für die Auswahl des ersten Elements aus diesen Klammern gibt es zwei Möglichkeiten. Nachdem die Auswahl getroffen ist, kann jede dieser Auswahlmöglichkeiten mit den zwei Auswahlmöglichkeiten aus der nächsten Klammer kombiniert werden, das heißt, es gibt insgesamt $2 \cdot 2$ Auswahlmöglichkeiten. Für die nächste Klammer gibt es wieder zwei Möglichkeiten, insgesamt also $2 \cdot 2 \cdot 2$, und für n Klammern, aus denen eine Auswahl getroffen werden kann, ist die Zahl der Auswahlmöglichkeiten insgesamt

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots \cdot 2}_{\text{n Faktoren}} = 2^n$$