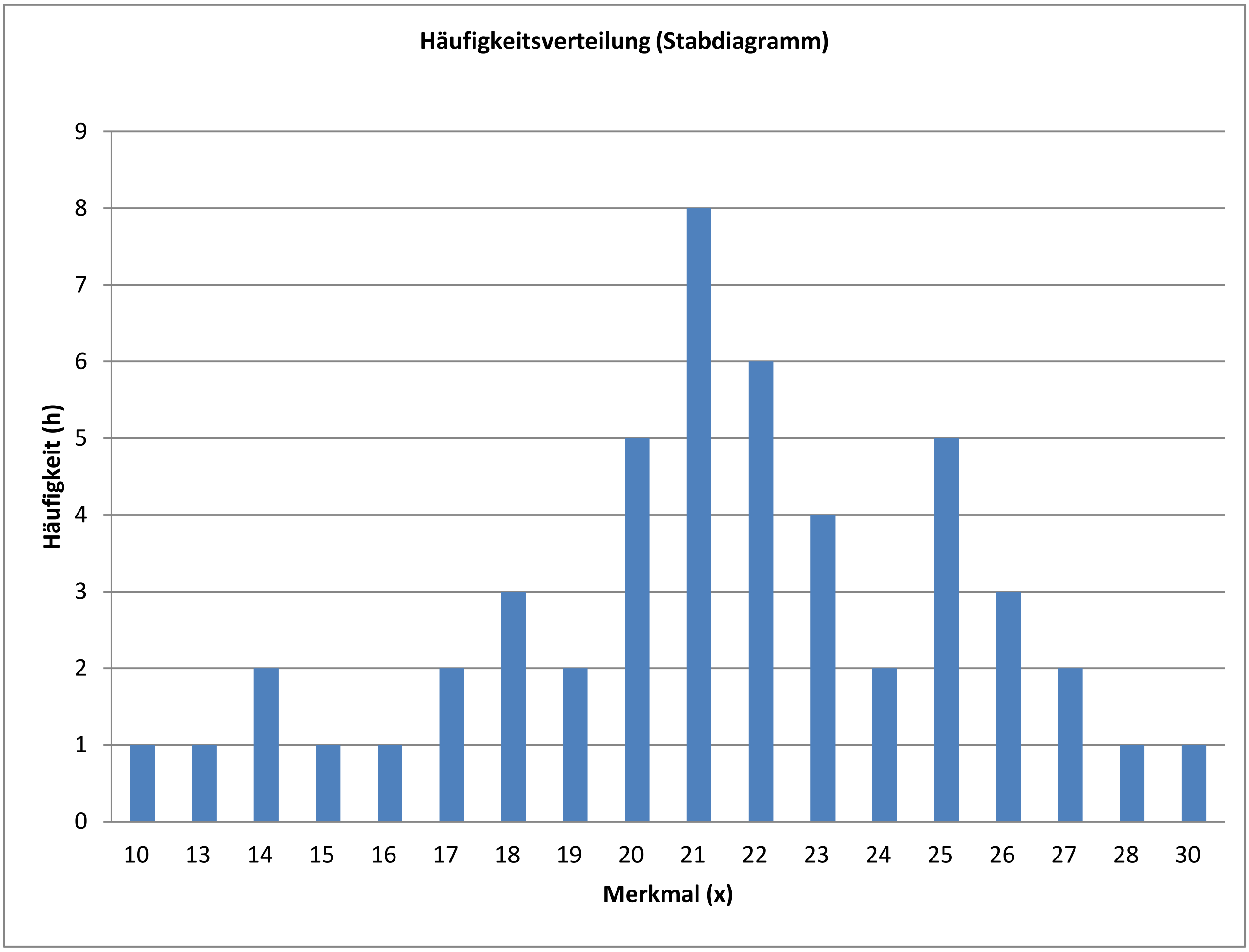
Lösungen

Aufgabe 1

Merkmal (x)	Häufigkeit (h)	h·x
10,00	1	10,00
13,00	1	13,00
14,00	2	28,00
15,00	1	15,00
16,00	1	16,00
17,00	2	34,00
18,00	3	54,00
19,00	2	38,00
20,00	5	100,00
21,00	8	168,00
22,00	6	132,00
23,00	4	92,00
24,00	2	48,00
25,00	5	125,00
26,00	3	78,00
27,00	2	54,00
28,00	1	28,00
30,00	1	30,00
Summe	50	1.063,00

Aufgabe 2



Lösungen

Aufgabe 3

$$n := \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 13 \\ 15 \\ 17 \\ 19 \\ 21 \\ 23 \\ 25 \\ 27 \\ 29 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Klassengrenzen für das Histogramm

$\mathrm{Histogramm}(n, x) =$

	1	2
1	10	1
2	12	0
3	14	3
4	16	2
5	18	5
6	20	7
7	22	14
8	24	6
9	26	8
10	28	3
11	30	1

Klassenmitten und Häufigkeit

Häufigkeit:

$h := \mathrm{Histogramm}(n, x)^{\langle 2 \rangle} =$

	1
1	1
2	0
3	3
4	2
5	5
6	7
7	14
8	6
9	8
10	3
11	1

Klassenmitte:

$k := \mathrm{Histogramm}(n, x)^{\langle 1 \rangle} =$

	1
1	10
2	12
3	14
4	16
5	18
6	20
7	22
8	24
9	26
10	28
11	30

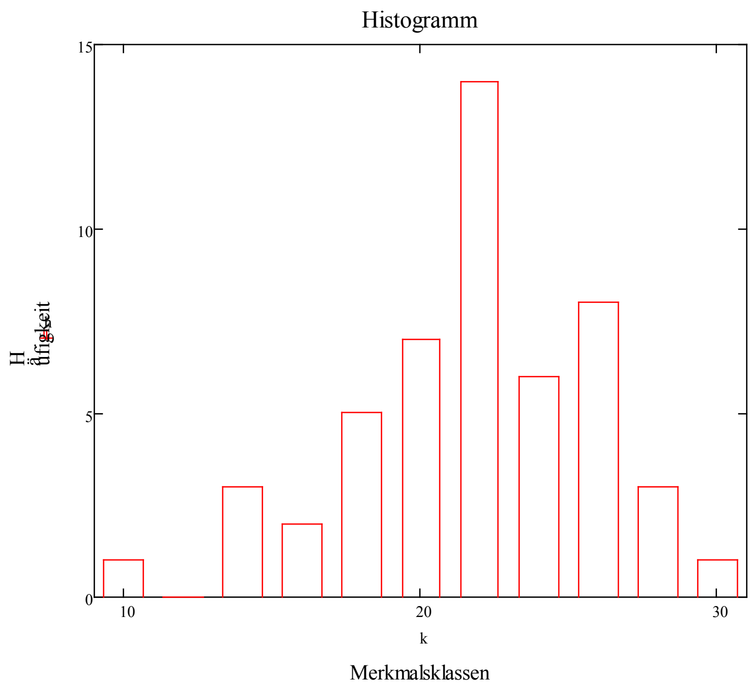
Merkmalssumme: $h \cdot k = 1088$

Lösungen

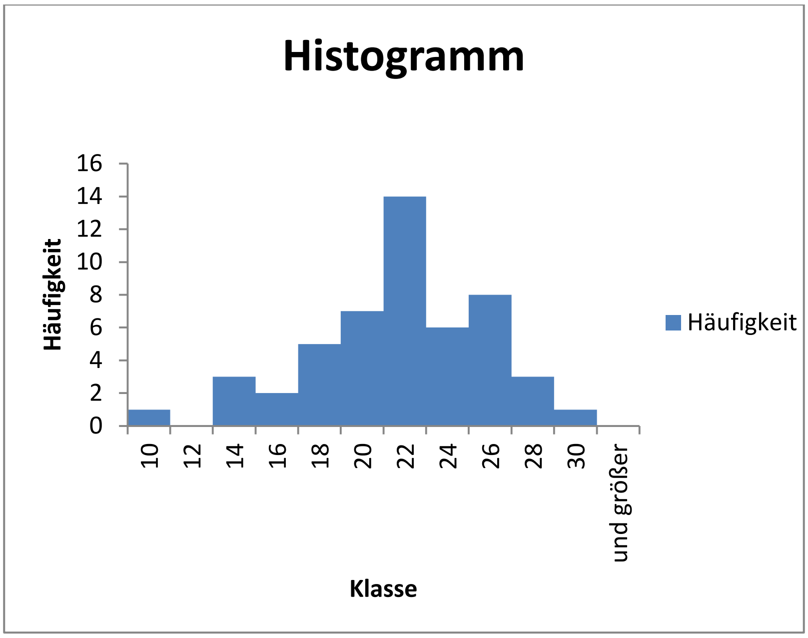
Aufgabe 4

Bei einer klassierten Häufigkeitsverteilung wird die Merkmalssumme ermittelt, indem man die Klassenmitte mit der Häufigkeit der Merkmalsausprägungen multipliziert und für jede Klasse addiert. Die Klassenmitte ersetzt die tatsächlichen Werte der Merkmalsausprägungen. Dies führt nur dann zum richtigen Ergebnis für die Merkmalssumme, wenn die Klassenmitte genau den durchschnittlichen Wert der Merkmalsausprägungen in dieser Klasse darstellt. Das muss aber nicht der Fall sein, wie man zum Beispiel an der Klasse von 13 bis unter 15 sieht: In diese Klasse fallen die Werte 13, 14, 14. Dies ergibt als Beitrag dieser Klasse zur Merkmalssumme 41. Rechnet man aber mit der Klassenmitte, so ist diese 14, multipliziert mit 3 Merkmalsausprägungen ergibt 42, also etwas zu viel. Dies kann sich summieren. Im Beispiel ist die tatsächliche Merkmalssumme 1.063, während die Summe über die Klassenmitten 1.088 ergibt. Durch die Klassierung entsteht also ein Informationsverlust.

Aufgabe 5



Aufgabe 6



Lösungen

Aufgabe 7

$$x_1 + x_2 \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Aufgabe 8

$$h_1 \cdot x_1 + h_2 \cdot x_2 \ldots + h_m \cdot x_m = \sum_{j=1}^{m} h_j \cdot x_j$$

Aufgabe 9

Mit den Symbolen aus Aufgabe 8 ist die Anzahl aller Merkmalsausprägungen die Summe aller Häufigkeiten $\sum_{j=1}^{m} h_j \cdot x_j$. Die relative Häufigkeit f_j eines bestimmten Merkmals ist seine absolute Häufigkeit h_j, geteilt durch die Summe aller Häufigkeiten, also $f_j = \frac{h_j}{\sum_{j=1}^{m} h_j}$. Dies über alle j summiert:

$$\sum_{j=1}^{m} f_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{h_j}{\sum_{j=1}^{m} h_j} = \frac{\sum_{j=1}^{m} h_j}{\sum_{j=1}^{m} h_j} = 1$$

Aufgabe 10

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{X} = n \cdot \overline{X}$$

Lösungen

Aufgabe 11

$\mathrm{ORIGIN} \equiv 1$

$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ Ausprägungen des Merkmals x

$n := \mathrm{länge}(x) = 5$ Anzahl der unterschiedlichen Merkmalsausprägungen

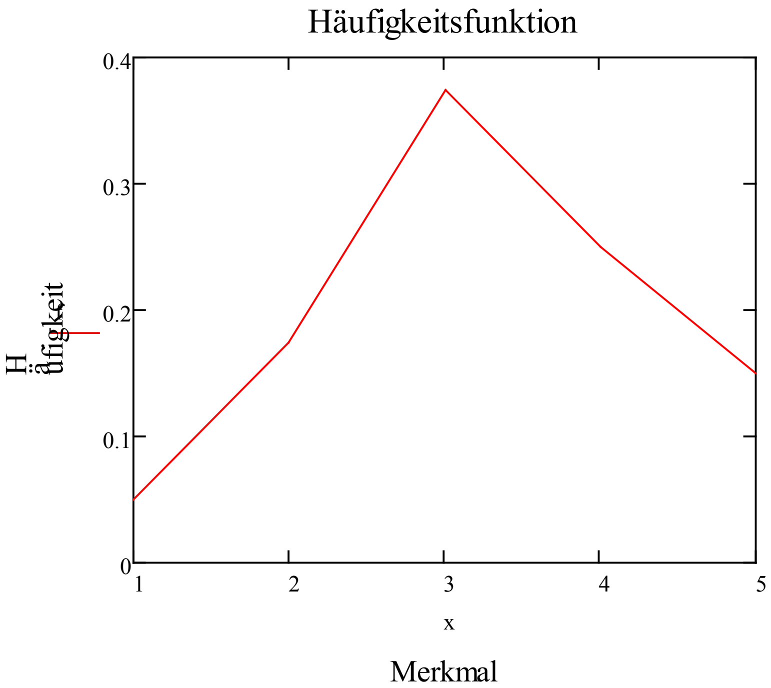
$i := 1..n$ Index der Elemente des Vektors x
[Lfd. Nr. der einzelnen Merkmalsausprägungen]

$h := \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 15 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ Häufigkeit der einzelnen Ausprägungen des Merkmals

$\sum h = 40$ Anzahl aller Ausprägungen des Merkmals
[Anzahl der Erhebungsobjekte]

$f := \dfrac{h}{\sum h} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.175 \\ 0.375 \\ 0.25 \\ 0.15 \end{pmatrix}$ Relative Häufigkeit der einzelnen Ausprägungen des Merkmals

$\sum f = 1$ Summe der relativen Häufigkeiten



Lösungen

$$H(i) := \sum_{i=1}^{i} h_i$$

Kumulierte absolute Häufigkeiten

$H(i) =$

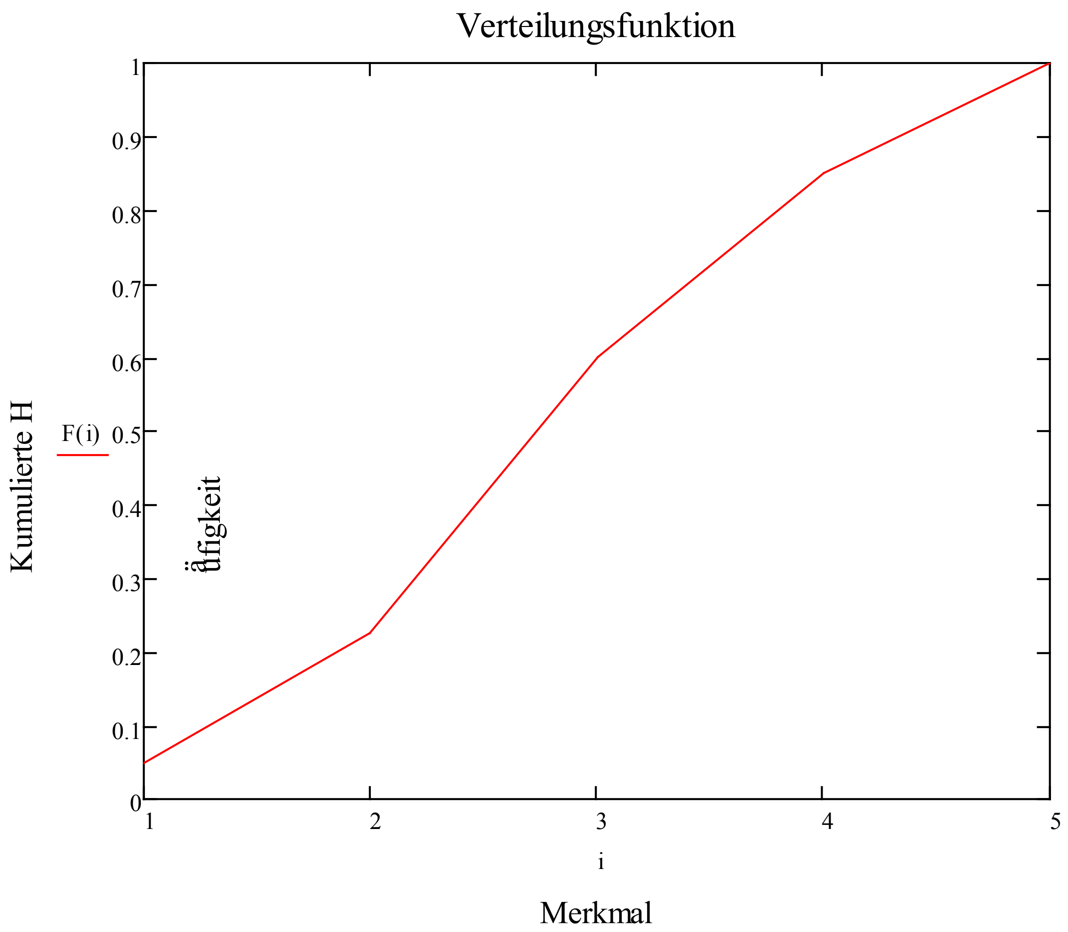
2
9
24
34
40

$$F(i) := \frac{H(i)}{\sum h}$$

Kumulierte relative Häufigkeiten

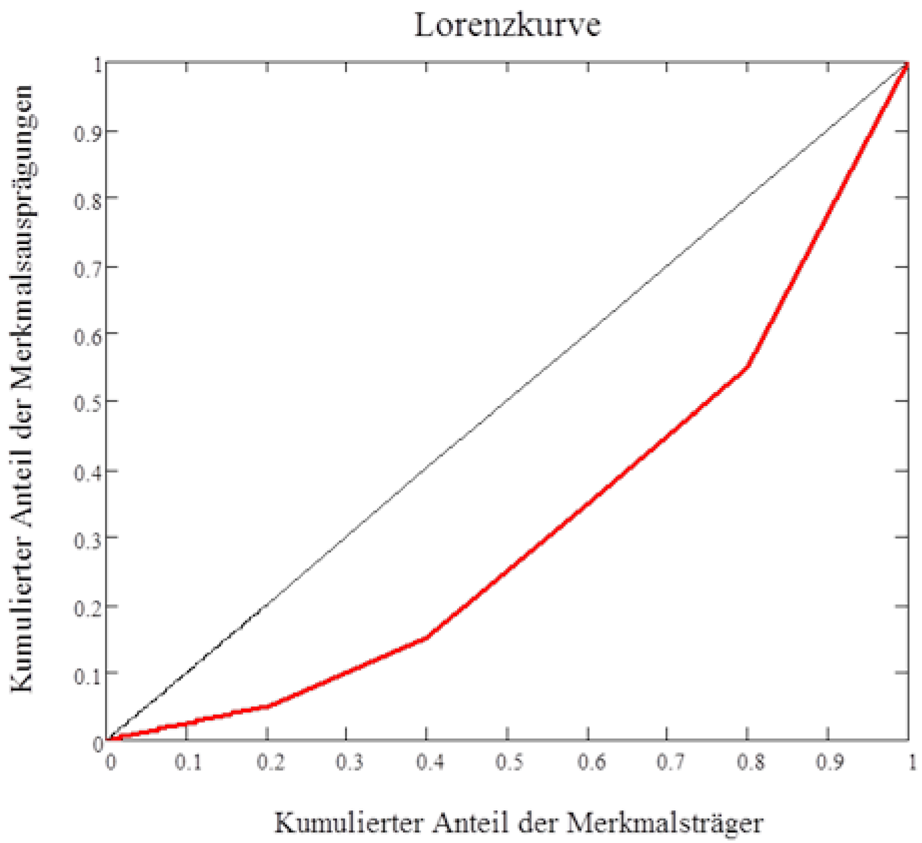
$F(i) =$

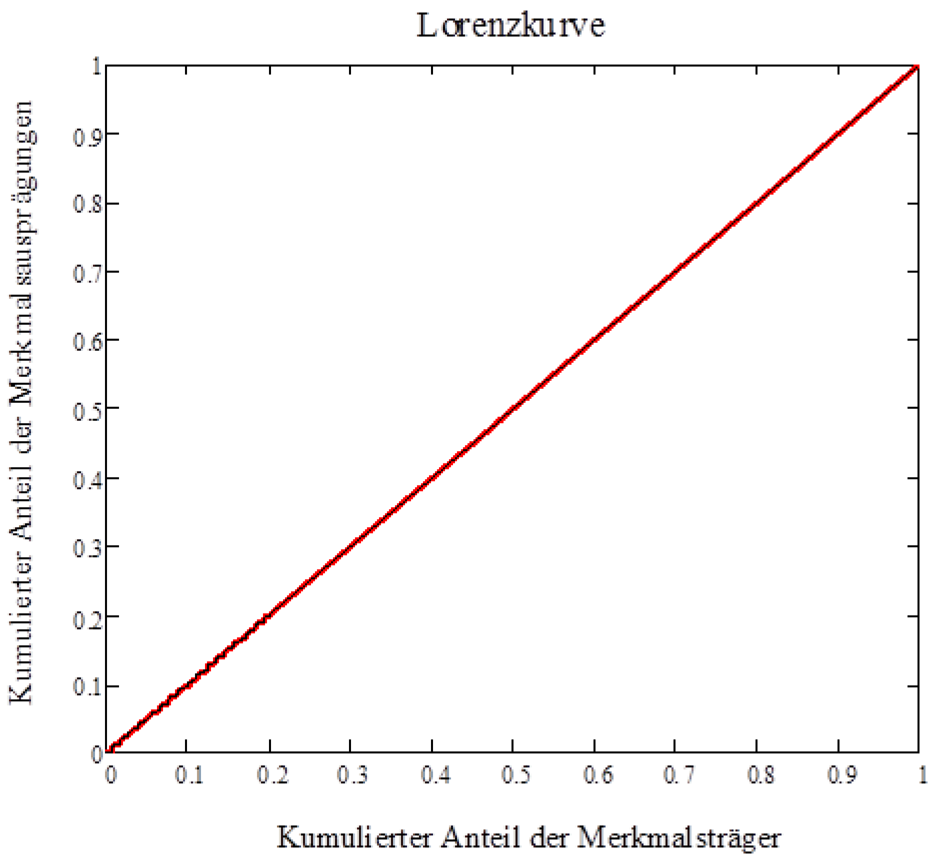
0.05
0.225
0.6
0.85
1



Lösungen

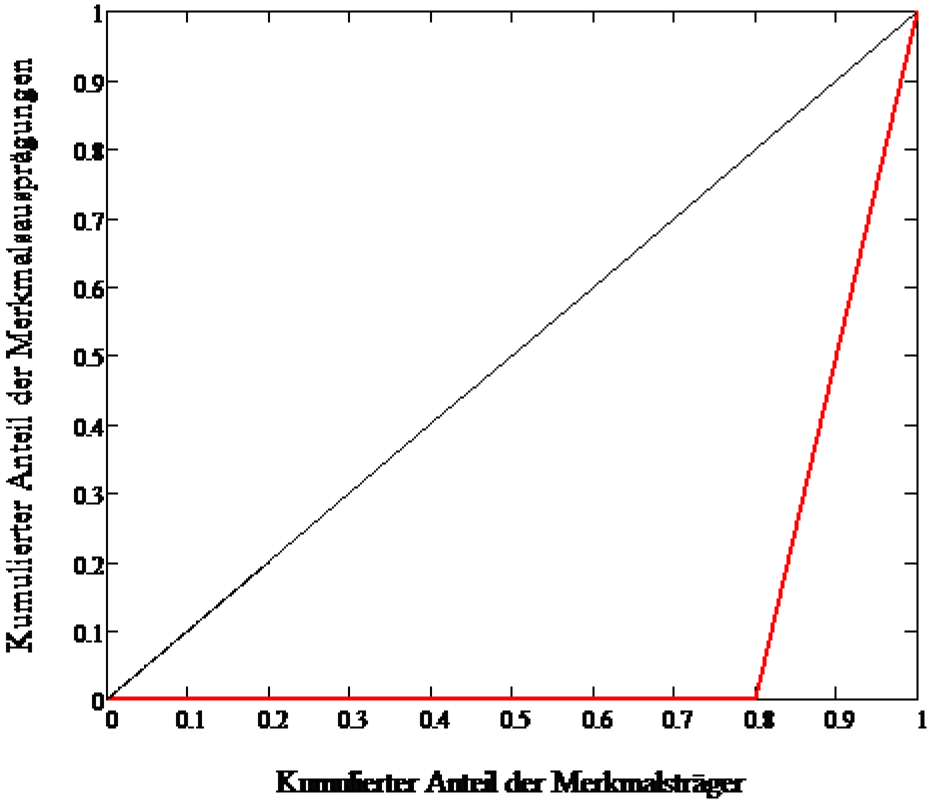
Aufgabe 12



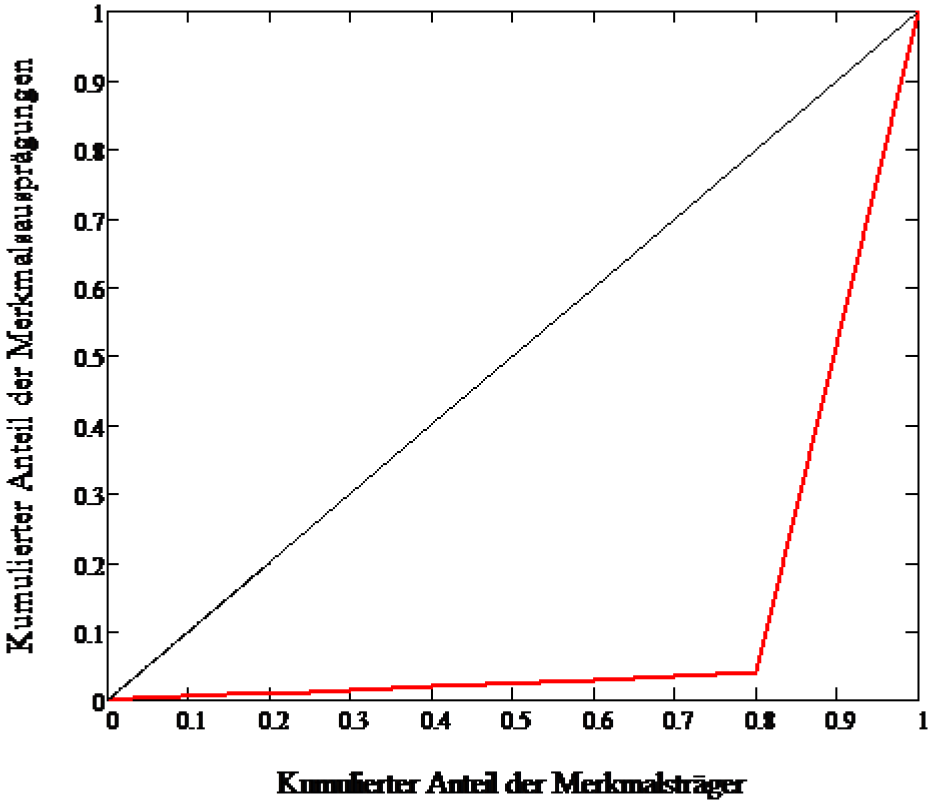


Lösungen

Lorenzkurve



Lorenzkurve



Lösungen

Aufgabe 13

Lfd. Nr. Beitragseinnahmen [Mio. Euro] 2009 $\text{ORIGIN} \equiv 1$

$$i := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad x := \begin{pmatrix} 5274 \\ 6144 \\ 6355 \\ 8142 \\ 10285 \\ 10521 \\ 14850 \\ 20923 \\ 41423 \\ 97385 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Signal Iduna Gruppe} \\ \text{Zurich Gruppe Deutschland} \\ \text{Versicherungskammer Bayern} \\ \text{Debeka Versicherungen} \\ \text{Axa Konzern AG} \\ \text{R+V Konzern} \\ \text{Generali Deutschland Holding} \\ \text{Talanx AG} \\ \text{Münchener-Rück-Gruppe} \\ \text{Allianz Group} \end{pmatrix}$$

Quelle: Institut der deutschen Wirtschaft Köln (Hrsg.), Deutschland in Zahlen - Ausgabe 2011 -, Köln 2011, S. 52

$n := \text{länge}(i) = 10$

$p := 0.1$ $\quad Q1 := \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x_{n \cdot p} + x_{n \cdot p+1}}{2} & \text{if } \operatorname{ceil}(n \cdot p) - n \cdot p = 0 \\ x_{\operatorname{ceil}(n \cdot p)} & \text{otherwise} \end{array} \right.$

$p = 10 \cdot \%$ - Quantil:

$Q1 = 5709$

$p := 0.2$ $\quad Q2 := \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x_{n \cdot p} + x_{n \cdot p+1}}{2} & \text{if } \operatorname{ceil}(n \cdot p) - n \cdot p = 0 \\ x_{\operatorname{ceil}(n \cdot p)} & \text{otherwise} \end{array} \right.$

$p = 20 \cdot \%$ - Quantil:

$Q2 = 6249.5$

$p := 0.25$ $\quad Q3 := \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x_{n \cdot p} + x_{n \cdot p+1}}{2} & \text{if } \operatorname{ceil}(n \cdot p) - n \cdot p = 0 \\ x_{\operatorname{ceil}(n \cdot p)} & \text{otherwise} \end{array} \right.$

$p = 25 \cdot \%$ - Quantil:

$Q3 = 6355$

$p := 0.3$ $\quad Q4 := \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x_{n \cdot p} + x_{n \cdot p+1}}{2} & \text{if } \operatorname{ceil}(n \cdot p) - n \cdot p = 0 \\ x_{\operatorname{ceil}(n \cdot p)} & \text{otherwise} \end{array} \right.$

$p = 30 \cdot \%$ - Quantil:

$Q4 = 7248.5$

$p := 0.4$ $\quad Q5 := \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x_{n \cdot p} + x_{n \cdot p+1}}{2} & \text{if } \operatorname{ceil}(n \cdot p) - n \cdot p = 0 \\ x_{\operatorname{ceil}(n \cdot p)} & \text{otherwise} \end{array} \right.$

$p = 40 \cdot \%$ - Quantil:

$Q5 = 9213.5$

$p := 0.5$ $\quad Q6 := \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x_{n \cdot p} + x_{n \cdot p+1}}{2} & \text{if } \operatorname{ceil}(n \cdot p) - n \cdot p = 0 \\ x_{\operatorname{ceil}(n \cdot p)} & \text{otherwise} \end{array} \right.$

$p = 50 \cdot \%$ - Quantil:

$Q6 = 10403$

$p := 0.6$ $\quad Q7 := \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x_{n \cdot p} + x_{n \cdot p+1}}{2} & \text{if } \operatorname{ceil}(n \cdot p) - n \cdot p = 0 \\ x_{\operatorname{ceil}(n \cdot p)} & \text{otherwise} \end{array} \right.$

$p = 60 \cdot \%$ - Quantil:

$Q7 = 12685.5$

Lösungen

$p := 0.7$ $\quad Q8 := \begin{cases} \dfrac{x_{n\cdot p} + x_{n\cdot p+1}}{2} & \text{if } \operatorname{ceil}(n\cdot p) - n\cdot p = 0 \\ x_{\operatorname{ceil}(n\cdot p)} & \text{otherwise} \end{cases}$

$p = 70\cdot\%$ - Quantil:
$Q8 = 17886.5$

$p := 0.75$ $\quad Q9 := \begin{cases} \dfrac{x_{n\cdot p} + x_{n\cdot p+1}}{2} & \text{if } \operatorname{ceil}(n\cdot p) - n\cdot p = 0 \\ x_{\operatorname{ceil}(n\cdot p)} & \text{otherwise} \end{cases}$

$p = 75\cdot\%$ - Quantil:
$Q9 = 20923$

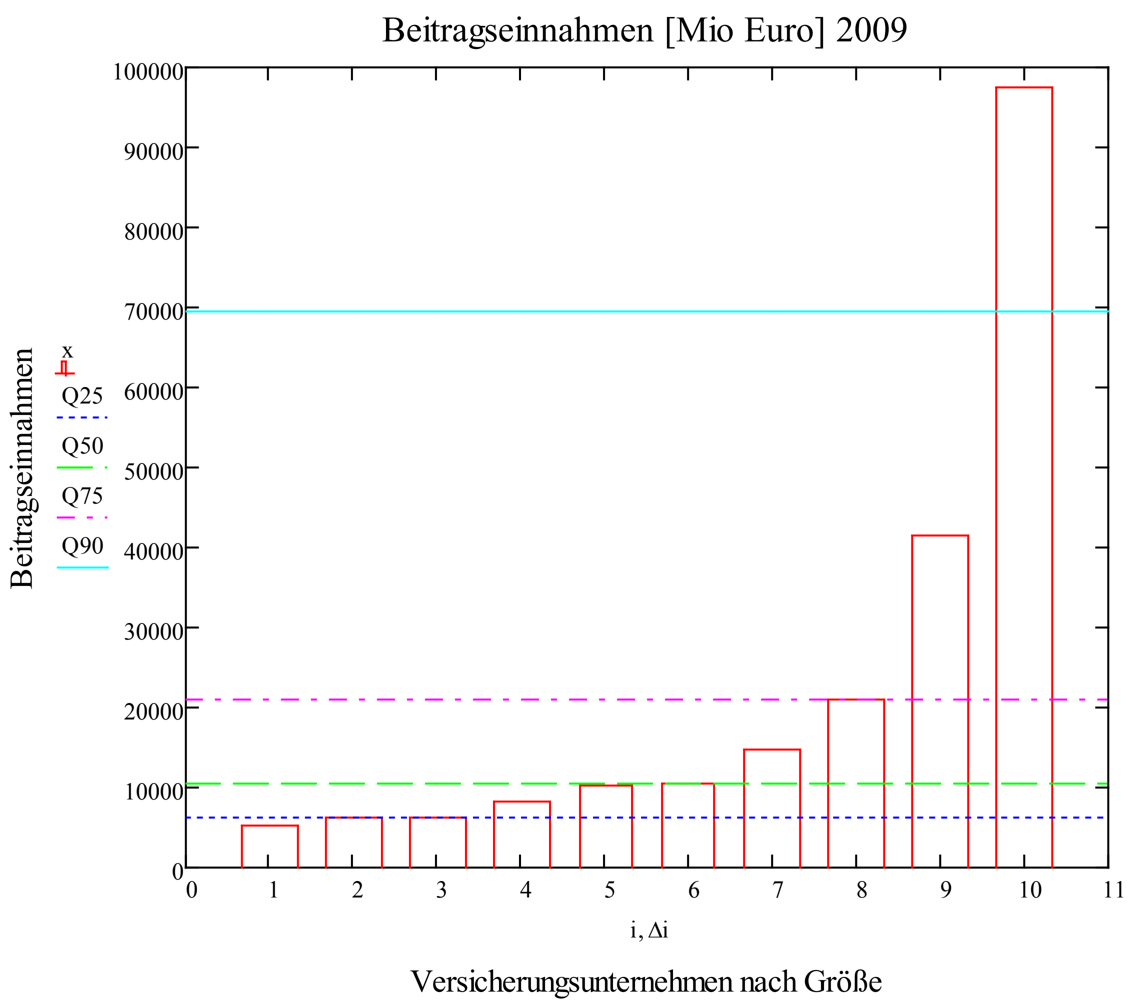
$p := 0.8$ $\quad Q10 := \begin{cases} \dfrac{x_{n\cdot p} + x_{n\cdot p+1}}{2} & \text{if } \operatorname{ceil}(n\cdot p) - n\cdot p = 0 \\ x_{\operatorname{ceil}(n\cdot p)} & \text{otherwise} \end{cases}$

$p = 80\cdot\%$ - Quantil:
$Q10 = 31173$

$p := 0.9$ $\quad Q11 := \begin{cases} \dfrac{x_{n\cdot p} + x_{n\cdot p+1}}{2} & \text{if } \operatorname{ceil}(n\cdot p) - n\cdot p = 0 \\ x_{\operatorname{ceil}(n\cdot p)} & \text{otherwise} \end{cases}$

$p = 90\cdot\%$ - Quantil:
$Q11 = 69404$

Aufgabe 14



Lösungen

Aufgabe 15

Geleistete Arbeitsstunden:

Lohnkosten pro Arbeitsstunde:

$$\text{Häufigkeit} := \begin{pmatrix} 862400 \\ 752000 \\ 756000 \\ 768000 \\ 638400 \\ 640000 \\ 644000 \\ 528000 \\ 588000 \\ 792000 \\ 784000 \\ 676800 \end{pmatrix} \qquad \text{Merkmalsausprägung} := \begin{pmatrix} 20.06 \\ 23.01 \\ 24.47 \\ 22.53 \\ 27.1 \\ 28.91 \\ 36 \\ 32.77 \\ 31.8 \\ 21.84 \\ 22.07 \\ 36.33 \end{pmatrix}$$

Geleistete Arbeitsstunden insgesamt:

$$\sum \text{Häufigkeit} = 8429600$$

Lohnkosten insgesamt:

$$\text{Merkmalssumme} := \text{Häufigkeit} \cdot \text{Merkmalsausprägung} = 224581928$$

Lohnkosten pro Arbeitsstunde:

$$\text{Arithmetisches\_Mittel} := \frac{\text{Merkmalssumme}}{\sum \text{Häufigkeit}} = 26.642062$$

Aufgabe 16

Es gelten folgende Definitionen:

(1.1) $$\text{Relative Häufigkeit} = \frac{\text{Absolute Häufigkeit}}{\sum \text{Absolute Häufigkeiten}}$$

(1.2) $$\text{Arithmetisches Mittel} = \frac{\sum \text{Absolute Häufigkeit} \cdot \text{Merkmalsausprägung}}{\sum \text{Absolute Häufigkeiten}}$$

Da jedes Element der Summe im Zähler durch die Summe der absoluten Häufigkeiten geteilt werden muss, kann man (1.2) auch folgendermaßen schreiben:

(1.3) $$\text{Arithmetisches Mittel} = \sum \frac{\text{Absolute Häufigkeit}}{\sum \text{Absolute Häufigkeiten}} \cdot \text{Merkmalsausprägung}$$

Lösungen

Hierin (1.1) eingesetzt:

(1.4) $$\text{Arithmetisches Mittel} = \sum \text{Relative Häufigkeit} \cdot \text{Merkmalsausprägung}$$

Aufgabe 17

Das arithmetische Mittel ist definitionsgemäß

(1.5) $$\text{AM} = \frac{\sum \text{Merkmalsausprägungen}}{\text{Anzahl der Merkmalsausprägungen}}$$

Die Abweichung einer bestimmten Merkmalsausprägung vom arithmetischen Mittel ist

(1.6) $$\text{Abweichung} = \text{Merkmalsausprägung} - \text{AM}$$

Dies summiert:

$$\sum \text{Abweichungen} = \sum \text{Merkmalsausprägungen} - \sum \text{AM}$$

$$\sum \text{Abweichungen} = \sum \text{Merkmalsausprägungen} - \text{Anzahl der Merkmalsausprägungen} \cdot \text{AM}$$

$$\frac{\sum \text{Abweichungen}}{\text{Anzahl der Merkmalsausprägungen}} = \frac{\sum \text{Merkmalsausprägungen}}{\text{Anzahl der Merkmalsausprägungen}} - \text{AM}$$

Hierin (1.5) eingesetzt:

$$\frac{\sum \text{Abweichungen}}{\text{Anzahl der Merkmalsausprägungen}} = \text{AM} - \text{AM}$$

(1.7) $$\sum \text{Abweichungen} = 0$$

Aufgabe 18

$$y = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2x_i \cdot x + x^2\right)$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x + \sum_{i=1}^{n} x^2$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x + n \cdot x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i + 2n \cdot x = 0$$

$$-\sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot x = 0$$

$$n \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Lösungen

$$x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$x = \bar{x}$$

Da $\frac{d^2y}{dx^2} = 2n > 0$ liegt an dieser Nullstelle ein Minimum.

Aufgabe 19

$$x := \begin{pmatrix} 5274 \\ 6144 \\ 6355 \\ 8142 \\ 10285 \\ 10521 \\ 14850 \\ 20923 \\ 41423 \\ 97385 \end{pmatrix} \qquad n := \text{länge}(x) = 10 \qquad i := 1 .. n \qquad \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = 22130.2$$

Aufgabe 20

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \text{mittelwert}(x) \right| = 18909.52$$

Aufgabe 21

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \text{mittelwert}(x) \right)^2 = 7.349 \times 10^8$$

$$\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \text{mittelwert}(x) \right)^2} = 27109.509$$

Aufgabe 22

$$x := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad h := \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 15 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad x \cdot h = 131$$

Aufgabe 23

Behauptung:

Lösungen

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a\right)^2 = n \cdot \sum_{i=1}^{n} a^2$$

Beweis:

Es gilt $\sum_{i=1}^{n} a = n \cdot a$ und $\sum_{i=1}^{n} a^2 = n \cdot a^2$. Dies eingesetzt:

$$(n \cdot a)^2 = n \cdot n \cdot a^2$$

$$n^2 \cdot a^2 = n^2 \cdot a^2$$

Hieraus folgt die Gleichheit unmittelbar.

Aufgabe 24

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - c + \bar{x} - \bar{x}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_i - \bar{x}\right) + \left(\bar{x} - c\right)\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_i - \bar{x}\right)^2 + 2 \cdot \left(x_i - \bar{x}\right) \cdot \left(\bar{x} - c\right) + \left(\bar{x} - c\right)^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right) \cdot \left(\bar{x} - c\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x} - c\right)^2$$

Hierin gilt für $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot x \quad |:n$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right) = \frac{1}{n} \cdot x_i - \bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right) = 0$$

Dies eingesetzt:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x} - c\right)^2$$

Hierin ist $\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x} - c\right)^2 = n \cdot \left(\bar{x} - c\right)^2$, sodass:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 + n \cdot \left(\bar{x} - c\right)^2$$

Aufgabe 25

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 + n \cdot \left(\bar{x} - c\right)^2; \; c = 0:$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right) + n \cdot \bar{x}^2$$

Lösungen

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\cdot\bar{x}^2$$

Aufgabe 26

Man kann die Volatilität oder die Höhe der Kurschwankungen – beide Fragen zielen auf das Gleiche – nur mit einem relativen Streuungsmaß vergleichen. Ein solches Maß ist der Variationskoeffizient.

$$\text{Variationskoeffizient}=\frac{\text{Standardabweichung}}{\text{Arithmetisches Mittel}}$$

Für Aktie A ergibt sich

$$\frac{5}{35}=0{,}143=14{,}3\%$$

und für Aktie B

$$\frac{2{,}6}{9{,}5}=0{,}274=27{,}4\%$$

Aktie B ist also volatiler als Aktie A.

Aufgabe 27

Mit F für die Fläche gilt

(1.8) $$F=B\cdot H$$

(1.9) $$B+H=C$$

Aus (1.9) folgt

(1.10) $$B=C-H$$

Gleichung (1.10) in (1.8) eingesetzt:

(1.11) $$F=\left(C-H\right)\cdot H=C\cdot H-H^2\rightarrow \text{min!}$$

$$\frac{dF}{dH}=C-2H=0$$

(1.12) $$H=\frac{C}{2}$$

(1.12) in (1.10) eingesetzt:

(1.13) $$B=\frac{C}{2}$$

Da $\frac{d^2F}{dH^2}=-2<0$ ist die Fläche maximal, wenn $\frac{C}{2}=B=H$. Von allen Rechtecken mit gleicher Seitenlänge hat ein Quadrat die größte Fläche.

Lösungen

Aufgabe 28

$$\frac{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\cdot\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}=\frac{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\cdot\left(y_i-\overline{y}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^{0,5}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{0,5}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\cdot\left(y_i-\overline{y}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^{0,5}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{0,5}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\cdot\left(y_i-\overline{y}\right)}{\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\cdot\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$$

Das Gleiche gilt für n – 1, da n beliebig ist.

Aufgabe 29

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\cdot\left(x_i-\overline{x}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\right]^{0,5}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\right]^{0,5}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=1$$

Aufgabe 30

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[-\left(y_i-\overline{y}\right)\cdot\left(y_i-\overline{y}\right)\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[-\left(y_i-\overline{y}\right)\right]^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}=\frac{-\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2\right]^{0,5}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2\right]^{0,5}}=\frac{-\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}=-1$$

Aufgabe 31

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}a\cdot\left(y_i-\overline{y}\right)\cdot\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[a\cdot\left(y_i-\overline{y}\right)\right]^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}=\frac{a\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a^2\cdot\left(y_i-\overline{y}\right)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}=\frac{a\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}{\sqrt{a^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$$

$$=\frac{a\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}{\sqrt{a^2}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2\right]^{0,5}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2\right]^{0,5}}$$

$$=\frac{a\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}{a\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}$$

$$=1$$

Lösungen

Aufgabe 32

$$\frac{\delta(y_i - a - b\cdot x_i)^2}{\delta a} = 2(y_i - a - b\cdot x_i)(-1) = -2(y_i - a - b\cdot x_i)$$

$$\frac{\delta^2(y_i - a - b\cdot x_i)^2}{\delta a^2} = 2$$

$$\frac{\delta(y_i - a - b\cdot x_i)^2}{\delta b} = 2(y_i - a - b\cdot x_i)(-x_i) = -2(y_i - a - b\cdot x_i)x_i$$

$$\frac{\delta^2(y_i - a - b\cdot x_i)^2}{\delta b^2} = 2x_i^2$$

Aufgabe 33

$$x := \begin{pmatrix} 21 \\ 28 \\ 35 \\ 46 \\ 55 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 1850 \\ 1800 \\ 2230 \\ 2500 \\ 2560 \end{pmatrix} \qquad r := \mathrm{korr}(x, y) = 0.946$$

Der Korrelationskoeffizient von über 0,9 deutet auf eine hohe Korrelation zwischen Alter und Einkommen.

Aufgabe 34

$$r = 0.946$$

$$s_x := \mathrm{stdev}(x) = 12.215$$

$$s_y := \mathrm{stdev}(y) = 316.948$$

$$b := r\cdot\frac{s_y}{s_x} = 24.558$$

$$a := \mathrm{mittelwert}(y) - b\cdot\mathrm{mittelwert}(x) = 1279.367$$

Aufgabe 35

$$y(x) := a + b\cdot x$$

$$y(60) = 2752.83$$

$$y(65) = 2875.61$$

$$y(67) = 2924.73$$

Lösungen

Aufgabe 36

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \end{pmatrix} \qquad r := \mathrm{korr}(x, y) = 0.981$$

Aufgabe 37

$$y := x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Regressionsfunktion}(x) := x^2$$

$$\mathrm{Regressionsfunktion}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{korr}(\mathrm{Regressionsfunktion}(x), y) = 1$$

Aufgabe 38

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 100 \\ 400 \\ 900 \\ 1600 \\ 2500 \end{pmatrix} \qquad r := \mathrm{korr}(x, y) = 1$$

Aufgabe 39

$$\mathrm{Regressionsfunktion}(x) := 100 \cdot x$$

$$\mathrm{Regressionsfunktion}(x) = \begin{pmatrix} 100 \\ 400 \\ 900 \\ 1600 \\ 2500 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{korr}(\mathrm{Regressionsfunktion}(x), y) = 1$$

Lösungen

Aufgabe 40

Da s_y^2 als Quadrat immer positiv ist, wird das Vorzeichen des Ausdrucks $s_y^2 \cdot (1 - r^2)$ nur durch $(1 - r^2)$ bestimmt. Wenn in diesem Ausdruck $r^2 > 1$ ist, wird die Bedingung verletzt. r^2 darf also keinen größeren Wert annehmen als 1. r^2 ist dann größer als 1, wenn $r > 1$ oder $r < -1$. Dann aber wäre die Bedingung verletzt. Also darf r nicht größer als 1 sein und nicht kleiner als -1.

Aufgabe 41

$$t := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 3321 \\ 3427 \\ 3525 \\ 3619 \\ 3692 \\ 3761 \\ 3865 \\ 4012 \\ 4097 \\ 4258 \end{pmatrix}$$

$r = 0.995$

$s_t := \text{stdev}(t) = 2.872$

$s_y := \text{stdev}(y) = 286.25$

$b := r \cdot \dfrac{s_y}{s_t} = 99.182$

$a := \text{mittelwert}(y) - b \cdot \text{mittelwert}(t) = 3212.2$

$y(t) := a + b \cdot t$

y(t) =

	1
1	3311.38
2	3410.56
3	3509.75
4	3608.93
5	3708.11
6	3807.29
7	3906.47
8	4005.65
9	4104.84
10	4204.02

Lösungen

Aufgabe 42

$K_0 := 94.5$

$K_t := 108.2$

$t := 9$

$$w_p := \left(\frac{K_t}{K_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 = 0.0151561$$

Aufgabe 43

$K_0 := 3321$

$K_t := 4258$

$t := 9$

$$w_n := \left(\frac{K_t}{K_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 = 0.02799967$$

Aufgabe 44

$$w_r := \frac{1 + w_n}{1 + w_p} - 1 = 0.01265182$$

Aufgabe 45

$$\frac{4258}{\left(1 + w_p\right)^t} = 3718.86$$

alternativ:

$$3321 \cdot \left(1 + w_r\right)^t = 3718.86$$

Aufgabe 46

$w_n := 0.0175$

$w_p := 0.025$

$$w_r := \frac{1 + w_n}{1 + w_p} - 1 = -0.00731707$$

Lösungen

Aufgabe 47

Disjunkte Ereignisse sind solche, die sich gegenseitig ausschließen. Das ist bei den Schadeneintritten von Versicherungsnehmern nicht der Fall. Diese Ereignisse sind also keine disjunkten Ereignisse.

Aufgabe 48

Da sich die Wahrscheinlichkeiten im Venn-Diagramm nicht überlappen, sind die Ereignisse $P(A \setminus B)$, $P(A \cap B)$ und $P(B \setminus A)$ disjunkte Ereignisse. Hierfür gilt der Additionssatz disjunkter Ereignisse:

(1.14) $$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A)$$

Außerdem gilt

(1.15) $$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

(1.16) $$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$$

(1.15) und (1.16) in (1.14) eingesetzt:

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

(1.17) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dies ist der Additionssatz für zwei nicht disjunkte Ereignisse.

Aufgabe 49

Da die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Eintreten der Ereignisse null ist, handelt es sich um disjunkte Ereignisse. Hierfür gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$$

Aufgabe 50

Es gilt der Additionssatz für zwei nicht disjunkte Ereignisse:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}1 + 0{,}2 - 0{,}02 = 0{,}28$$

Aufgabe 51

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}9 + 0{,}9 - 0{,}81 = 0{,}99$$

Aufgabe 52

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}9 - 0{,}81 = 0{,}09$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}9 - 0{,}81 = 0{,}09$$

$$P(A \setminus B \cup B \setminus A) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) = 0{,}09 + 0{,}09 = 0{,}18$$

$$P(A \cap B) = 0{,}81$$

$$P(A \setminus B \cup B \setminus A \cup A \cap B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) = 0{,}09 + 0{,}09 + 0{,}81 = 0{,}99$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}9 + 0{,}9 - 0{,}81 = 0{,}99$$

Lösungen

Aufgabe 53

Abhängige Ereignisse sind solche, deren Wahrscheinlichkeit sich ändert, wenn das Ereignis, von dem sie abhängig sind, eingetreten ist. Wenn ein disjunktes Ereignis eingetreten ist, kann ein anderes disjunktes Ereignis nicht mehr eintreten. Dessen Wahrscheinlichkeit ist dann null, hat sich also durch den Eintritt des ersten Ereignisses geändert. Das heißt: Disjunkte Ereignisse sind voneinander abhängig.

Aufgabe 54

Die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Eintreten unabhängiger Ereignisse ist das Produkt ihrer Wahrscheinlichkeiten, hier also $0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$.

Aufgabe 55

$w_s^{\,i}$

Aufgabe 56

$(1 - w_s)^{n-i}$

Aufgabe 57

Geschäft 1:

$G_1 := 500$

$G_2 := -100$

$w_1 := 0.9$

$w_2 := 0.1$

$\mu := G_1 \cdot w_1 + G_2 \cdot w_2 = 440$

$\sigma := \sqrt{(G_1 - \mu)^2 \cdot w_1 + (G_2 - \mu)^2 \cdot w_2} = 180$

Geschäft 2:

$G_1 := 600$

$G_2 := -1000$

$w_1 := 0.9$

$w_2 := 0.1$

$\mu := G_1 \cdot w_1 + G_2 \cdot w_2 = 440$

$\sigma := \sqrt{(G_1 - \mu)^2 \cdot w_1 + (G_2 - \mu)^2 \cdot w_2} = 480$

Aufgabe 58

$$\mu = s \cdot w_s + 0 \cdot (1 - w_s) = s \cdot w_s$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \left(s - s\cdot w_s\right)^2 \cdot w_s + \left(0 - s\cdot w_s\right)^2 \cdot \left(1 - w_s\right) \\
&= \left(s^2 - 2s^2\cdot w_s + s^2\cdot {w_s}^2\right)\cdot w_s + s^2\cdot {w_s}^2\cdot\left(1 - w_s\right) \\
&= s^2\cdot w_s - 2s^2\cdot {w_s}^2 + s^2\cdot {w_s}^3 + s^2\cdot {w_s}^2 - s^2\cdot {w_s}^3 \\
&= s^2\cdot w_s - s^2\cdot {w_s}^2 \\
&= s^2\cdot w_s\cdot\left(1 - w_s\right)
\end{aligned}$$

$$\sigma = s\cdot\sqrt{w_s\cdot\left(1 - w_s\right)}$$

Aufgabe 59

$$\mu = n\cdot s\cdot w_s$$

$$\sigma = s\cdot\sqrt{n\cdot w_s\cdot\left(1 - w_s\right)}$$

Aufgabe 60

Der Value at Risk ist ein Verlust, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit, z.B. 99,5 % nicht überschritten wird. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 100 – 99,5 % = 0,5 % wird der Verlust über dem Value at Risk liegen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Verlust wird durch den Value at Risk in zwei Teile geteilt. Rechts vom Value at Risk liegt die Wahrscheinlichkeit, dass der Verlust größer wird, und links davon liegt die Wahrscheinlichkeit, dass der Verlust kleiner ist.

Quantile unterteilen die geordneten Merkmalswert in definierte Teile. Das 99,5 %-Quantil unterteilt die Merkmalswerte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung in zwei Bereiche. Rechts vom 99,5 %-Quantil liegt die Wahrscheinlichkeit, dass der Merkmalswert größer ist als das Quantil, links davon liegt die Wahrscheinlichkeit, dass der Merkmalswert kleiner ist. Setzt man für den Merkmalswert „Verlust“, hat man mit dem Quantil den Value at Risk definiert. Der Value at Risk ist nichts anderes als ein Quantil.