

Der Additionssatz und der Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung befasst sich mit Ereignissen, die eintreten können, aber nicht eintreten müssen. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist ein Maß der Glaubwürdigkeit dafür, dass dieses Ereignis eintritt. Wahrscheinlichkeiten, mit denen man rechnen kann, werden in Zahlen zwischen 0 und 1 angegeben. Ist die Wahrscheinlichkeit gleich null, hält man das Ereignis für unmöglich; ist die Wahrscheinlichkeit gleich eins, hält man das Ereignis für sicher. Dazwischen kann die Wahrscheinlichkeit für ein unsicheres Ereignis beliebig abgestuft werden.

Wahrscheinlichkeiten lassen sich gut aus Zufallsexperimenten ableiten. Ein Zufallsexperiment ist ein Experiment, das unter gleichen Bedingungen mehrmals durchgeführt werden kann und dessen Ergebnis bei einmaliger Durchführung sich nicht vorhersagen lässt. So weiß man beim Würfelspiel zwar, dass der Würfel, wenn er gefallen ist, nur eine der Zahlen von eins bis sechs anzeigen kann, aber welche Zahl beim nächsten Wurf oben liegen wird, das kann man nun eben nicht vorhersagen. Wenn man nicht gerade mit Betrügern spielt, gibt es keinen Grund zu glauben, dass eine Zahl bevorzugt auftritt – man wird wohl alle 6 Möglichkeiten für gleich glaubwürdig halten und ihnen also die gleiche Wahrscheinlichkeit beimessen.

Die Überlegung liegt auf der Hand: Es gibt, wenn ein Würfel ein Mal geworfen wird, 6 Möglichkeiten für das Ergebnis. Interessiert man sich für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine bestimmte Augenzahl gewürfelt wird, zum Beispiel eine 6, dann kann man sagen: Die 6 ist eine von 6 Möglichkeiten, also ist die Wahrscheinlichkeit, bei einmaligem Würfeln eine 6 zu erzielen, gerade $1/6$. Wenn mehrere Fälle von Interesse sind, zum Beispiel wenn man gewinnt bei einer 1 oder bei einer 6, dann sind dies 2 von 6 Möglichkeiten, die Wahrscheinlichkeit wäre $2/6 = 1/3$.

Somit lässt sich die Wahrscheinlichkeit des interessierenden Falles oder der interessierenden Fälle als Ergebnis eines Zufallsexperimentes folgendermaßen definieren:

$$\text{Wahrscheinlichkeit der interessierenden Fälle} = \frac{\text{Anzahl der interessierenden Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Wissenschaftlich gesehen setzt diese Definition der Wahrscheinlichkeit voraus, dass die möglichen Fälle alle gleich wahrscheinlich sind. Damit ist die Wahrscheinlichkeit mit sich selbst definiert, eine wissenschaftlich abzulehnende Tautologie. Wenn man aber wie hier die Wahrscheinlichkeit als Maß der Glaubwürdigkeit für das Eintreten von Ereignissen definiert, dann kann man auch glauben, dass manche Ereignisse gleich wahrscheinlich sind. Welchen Grund sollte es sonst geben, eine bestimmte Augenzahl beim Würfeln für wahrscheinlicher zu halten als die anderen?

Die einzelnen sich gegenseitig ausschließenden Ergebnisse eines Zufallsexperimentes heißen Elementarereignisse. Die Menge aller möglichen Elementarereignisse eines bestimmten Zufallsexperimentes ist der Ereignisraum. Wenn man den Ereignisraum richtig definiert hat, kann man sagen: Eines der Elementarereignisse tritt mit Sicherheit ein, oder anders ausgedrückt: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass irgendein Elementarereignis bei einmaliger Durchführung eines Zufallsexperimentes eintritt, ist 1.

Es kann nur eines der Elementarereignisse eintreten und nicht gleichzeitig – als Ergebnis desselben Zufallsexperimentes – ein anderes. Zwei Ereignisse, die nicht gemeinsam eintreten können, die sich also gegenseitig ausschließen, nennt man disjunkte Ereignisse. Die Augenzahl eines Würfels kann nicht gleichzeitig 1 und 2 sein, und auch andere Kombinationen von Augenzahlen können bei einmaligem Werfen eines Würfels nicht auftreten. Da dies für jedes Paar von Elementarereignissen gilt (sonst wären es keine Elementarereignisse), bezeichnet man die Elementarereignisse eines bestimmten Ereignisraumes auch als paarweise disjunkt.

Es leuchtet unmittelbar ein, dass die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf entweder eine 1 oder eine 2 zu erzielen, $1/6 + 1/6 = 1/3$ beträgt. Man addiert einfach die Einzelwahrscheinlichkeiten für die beiden Ereignisse. Dass dies richtig ist, sieht man spätestens bei folgendem Satz ein: Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel entweder eine 1 oder eine 2 oder eine 3 oder eine 4 oder eine 5 oder eine 6 zu würfeln, ist $1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1$. Eine von den 6 Augenzahlen liegt mit Sicherheit oben.

Dies lässt sich mathematisch eleganter formulieren. Es sei $P(A)$ die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A und $P(B)$ die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B. Wenn A und B disjunkte Ereignisse sind, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass entweder A oder B eintritt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Der Additionssatz und der Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten

Dies ist der Additionssatz für die Wahrscheinlichkeiten von disjunkten Ereignissen.

Für n paarweise disjunkte Ereignisse A_i ($i = 1..n$) lässt sich der Additionssatz erweitern. Es gilt:

$$P(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

oder, in alternativer Schreibweise:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Natürlich gibt es auch Ereignisse, die nicht disjunkt sind, die gemeinsam eintreten können. Würfelt man mit einem Würfel zwei Mal, dann kann man eine 1 und eine 2 gleichzeitig würfeln, oder zwei Sechsen – Ereignisse, die bei einmaligem Würfeln disjunkt sind, hier aber Elementarereignisse darstellen.

Diese Elementarereignisse bestehen nun aus zwei Ereignissen, dem Ergebnis des ersten Wurfs und dem Ergebnis des zweiten Wurfs (ob man denselben Würfel zwei Mal wirft oder zwei Würfel zur gleichen Zeit, das läuft auf das Gleiche hinaus). Ein einzelner Wurf ist dagegen kein Elementarereignis mehr, denn das Zufallsexperiment besteht eben im zweimaligen Würfeln. Das Zufallsexperiment „zweimaliges Werfen eines Würfels“ hat als Elementarereignis das jeweilige Ergebnis beider Würfe. Nach dem ersten Wurf muss man den zweiten abwarten, damit man ein Elementarereignis erhält.

Insgesamt ergibt sich für dieses Zufallsexperiment folgender Ereignisraum:

1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

Ereignisraum des Wurfs zweier Würfel

Ein Elementarereignis kann also aus mehreren Ereignissen bestehen. Andererseits können Elementarereignisse je nach Fragestellung an das Zufallsexperiment zu beliebigen Ereignissen kombiniert werden. So kann man als zusammengesetztes Ereignis definieren: „Beide Würfel zeigen die gleiche Augenzahl“:

$$A = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6) \}$$

oder „Die Augensumme beträgt 10“:

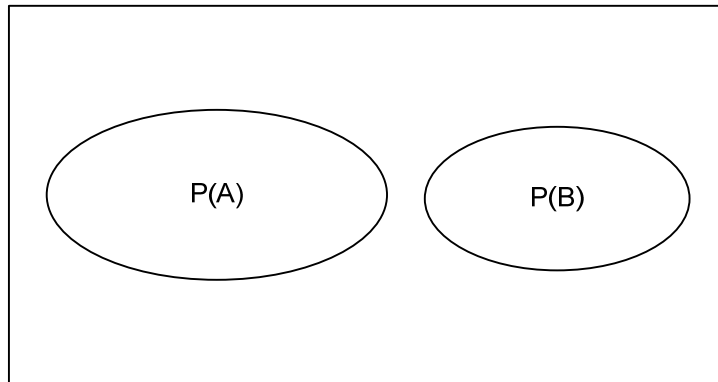
$$B = \{ (4,6), (5,5), (6,4) \}$$

Der Fantasie sind hier keine Grenzen gesetzt. Im Folgenden bleiben wir bei den nicht näher definierten Ereignissen A , B , $C \dots$ oder A_i und verwenden die Darstellung des Ereignisraumes als Fläche.

In der obigen Tabelle nimmt ja jedes der 36 Ereignisse genau $1/36$ der gesamten Fläche ein. Definiert man diese als 1, dann ist die Fläche eines Elementarereignisses gerade die Wahrscheinlichkeit, mit der es eintritt (es interessiert 1 Fall von 36 möglichen Fällen). Diese Darstellung von Wahrscheinlichkeiten als Flächen in einem Ereignisraum mit der Fläche 1 nennt man nach dem Erfinder John Venn ein Venn-Diagramm.

So lassen sich die Wahrscheinlichkeiten zweier disjunkter Ereignisse A und B folgendermaßen darstellen:

Der Additionssatz und der Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten

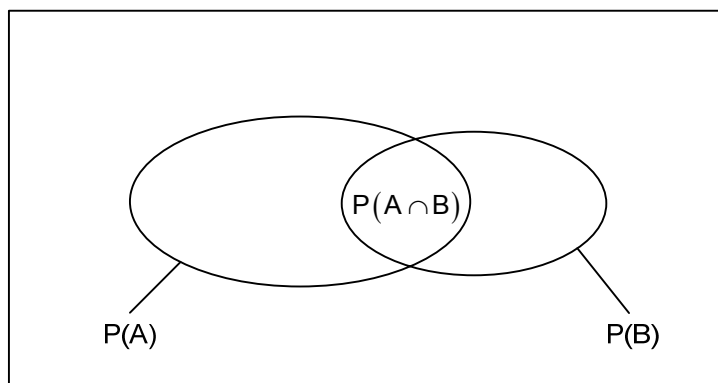


Wahrscheinlichkeiten disjunkter Ereignisse

Ein Blick auf dieses Diagramm bestätigt unmittelbar die Richtigkeit des Additionssatzes für die Wahrscheinlichkeiten disjunkter Ereignisse: Die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, ist die Fläche $P(A)$, die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, ist die Fläche $P(B)$, und die Wahrscheinlichkeit, dass entweder A oder B eintritt, ist die Summe der Flächen $P(A)$ und $P(B)$.

Nun gibt es auch den Fall, dass die interessierenden Ereignisse sich nicht gegenseitig ausschließen, sondern gemeinsam eintreten können. Wie wahrscheinlich ist es dann, dass entweder das Ereignis A oder das Ereignis B eintritt? Wie lautet der Additionssatz für die Wahrscheinlichkeiten nicht disjunkter Ereignisse?

Dieser Fall lässt sich leicht in einem Venn-Diagramm darstellen, indem die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$ überlappend eingezeichnet werden. Der Überlappungsbereich stellt dann die Wahrscheinlichkeit dar, dass sowohl das Ereignis A als auch das Ereignis B eintritt. Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Eintreten von A und B als $P(A \cap B)$, ist dies die Durchschnittsmenge von $P(A)$ und $P(B)$:



Wahrscheinlichkeiten nicht disjunkter Ereignisse

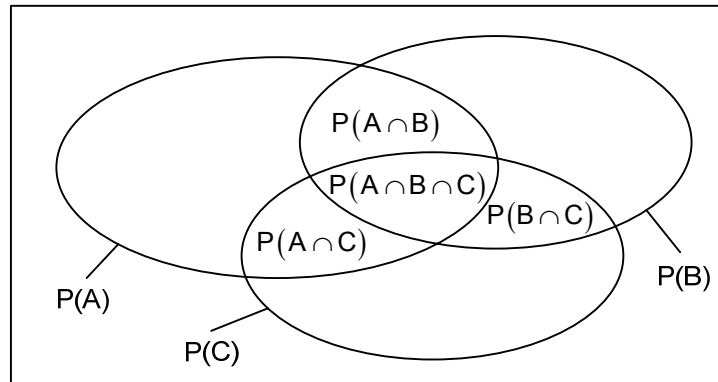
Offensichtlich ist die Wahrscheinlichkeit, dass entweder A oder B eintritt, die von beiden Wahrscheinlichkeiten eingeschlossene Fläche. Addiert man aber $P(A)$ und $P(B)$, um diese Wahrscheinlichkeit zu erhalten, muss man bedenken, dass die Fläche $P(A \cap B)$ sowohl in $P(A)$ als auch in $P(B)$ enthalten ist. In der Summe $P(A) + P(B)$ ist $P(A \cap B)$ zwei Mal enthalten; die Fläche wird doppelt gezählt. Zieht man deswegen $P(A \cap B)$ ein Mal ab, erhält man das richtige Ergebnis, den Additionssatz für die Wahrscheinlichkeit zweier nicht disjunkter Ereignisse:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass entweder ein beliebiges Ereignis oder ein anderes beliebiges Ereignis eintritt, ist die Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten abzüglich der Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Eintreten beider Ereignisse.

Die Dinge verkomplizieren sich, wenn drei Ereignisse betrachtet werden. Intuitiv ergibt sich für diesen Fall folgende Darstellung:

Der Additionssatz und der Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten

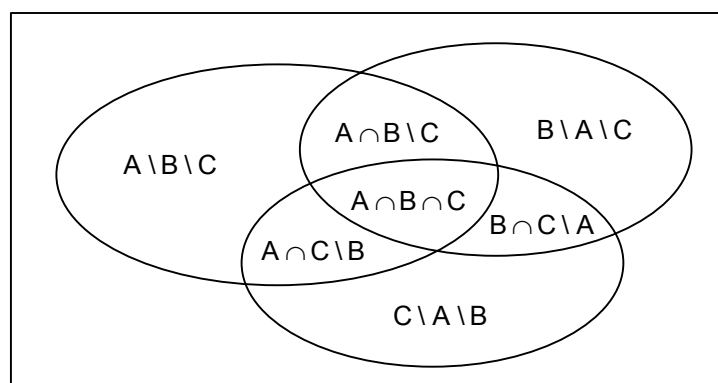


Wahrscheinlichkeiten dreier nicht disjunkter Ereignisse

Die Wahrscheinlichkeit für das alternative Eintreten dieser Ereignisse ist wieder die von den Wahrscheinlichkeiten eingeschlossene Fläche. Addiert man nun $P(A)$, $P(B)$ und $P(C)$, dann hat man die drei überlappenden Flächen $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ und $P(B \cap C)$ doppelt gezählt. Wenn man diese drei Flächen wieder abzieht, um das zu korrigieren, muss man wieder bedenken, dass die Wahrscheinlichkeiten $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ und $P(B \cap C)$ allesamt auch in der Fläche $P(A \cap B \cap C)$ enthalten sind. Zieht man also die Flächen $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ und $P(B \cap C)$ ab, dann hat man in Wirklichkeit jedes Mal die Fläche $P(A \cap B \cap C)$ mit abgezogen. Damit ist die Fläche $P(A \cap B \cap C)$ in der Addition von $P(A)$, $P(B)$ und $P(C)$ drei Mal enthalten, und mit der Subtraktion von $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ und $P(B \cap C)$ ist sie drei Mal abgezogen, sodass sie überhaupt nicht mehr enthalten ist. Um dies zu korrigieren, addiert man diese Fläche wieder und erhält mit einer gewissen Anspannung der Vorstellungskraft den Additionssatz der Wahrscheinlichkeiten von drei nicht disjunkten Ereignissen:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Ein stringenter Beweis ist das aber nicht. Dieser lässt sich führen, wenn man alle Flächen eindeutig und unterscheidbar benennt. Die Fläche $P(A \cap B)$ ist ja tatsächlich größer als eingezeichnet, weil die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Eintreten von A und B auch in der Fläche $P(A \cap B \cap C)$ enthalten ist. Die als $P(A \cap B)$ gekennzeichnete Fläche ist genau genommen die Fläche $P(A \cap B \setminus C)$, aber nicht $P(C)$. Mithilfe des Mengenoperators \setminus (ohne) lässt sich diese Fläche korrekt als $P(A \cap B \setminus C)$ bezeichnen. Wendet man diese Notation auf alle Kombinationsmöglichkeiten der drei Ereignisse A, B und C an, bilden drei Ereignisse, die gemeinsam eintreten können, folgende Mengen:



Kombinationsmöglichkeiten von drei Ereignissen A, B und C

Jede Fläche ist nun von allen anderen verschieden, die Flächen sind eindeutig gegeneinander abgegrenzt. Bei einmaliger Durchführung eines Zufallsexperimentes mit diesen möglichen Ergebnissen kann nur eine der Möglichkeiten eintreten, alle anderen nicht. Das heißt, die dargestellten Ereignisse und Ereigniskombinationen sind disjunkt. Damit gilt für das alternative Eintreten dieser Ereignisse der Additionssatz disjunkter Ereignisse, es ist:

Der Additionssatz und der Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten

$$(1) \quad P(A \cup B \cup C) = P(A \setminus B \setminus C) + P(B \setminus A \setminus C) + P(C \setminus A \setminus B) \\ + P(A \cap B \setminus C) + P(B \cap C \setminus A) + P(A \cap C \setminus B) \\ + P(A \cap B \cap C)$$

Zwischen den Elementen dieses Ausdrucks bestehen Beziehungen, die man zu seiner Vereinfachung ausnutzen kann. So ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A in allen Wahrscheinlichkeiten enthalten, in denen der Eintritt von A vorkommt. Es gilt:

$$(2) \quad P(A) = P(A \setminus B \setminus C) + P(A \cap B \setminus C) + P(A \cap C \setminus B) + P(A \cap B \cap C)$$

Entsprechend gilt für P(B) und P(C):

$$(3) \quad P(B) = P(B \setminus A \setminus C) + P(A \cap B \setminus C) + P(B \cap C \setminus A) + P(A \cap B \cap C)$$

$$(4) \quad P(C) = P(C \setminus A \setminus B) + P(A \cap C \setminus B) + P(B \cap C \setminus A) + P(A \cap B \cap C)$$

Für das paarweise Eintreten der Ereignisse A, B und C lassen sich die Zusammenhänge auf die gleiche Weise ableiten:

$$(5) \quad P(A \cap B) = P(A \cap B \setminus C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$(6) \quad P(B \cap C) = P(B \cap C \setminus A) + P(A \cap B \cap C)$$

$$(7) \quad P(A \cap C) = P(A \cap C \setminus B) + P(A \cap B \cap C)$$

Die Gleichungen (5), (6) und (7) werden nach den Ausdrücken umgestellt, die in den übrigen Gleichungen zu ersetzen sind:

$$(8) \quad P(A \cap B \setminus C) = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C)$$

$$(9) \quad P(B \cap C \setminus A) = P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

$$(10) \quad P(A \cap C \setminus B) = P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

Gleichungen (8) und (10) in (2) eingesetzt:

$$(11) \quad P(A) = P(A \setminus B \setminus C) + P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

Gleichungen (8) und (9) in (3) eingesetzt:

$$(12) \quad P(B) = P(B \setminus A \setminus C) + P(A \cap B) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

Gleichungen (9) und (10) in (4) eingesetzt:

$$(13) \quad P(C) = P(C \setminus A \setminus B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

Die Gleichungen (11), (12) und (13) werden nach $P(A \setminus B \setminus C)$, $P(B \setminus A \setminus C)$ bzw. $P(C \setminus A \setminus B)$ aufgelöst:

$$(14) \quad P(A \setminus B \setminus C) = P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$(15) \quad P(B \setminus A \setminus C) = P(B) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$(16) \quad P(C \setminus A \setminus B) = P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Gleichungen (14), (15) und (16) in (1) eingesetzt:

Der Additionssatz und der Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B \cup C) &= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
 &\quad + P(B) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
 (17) \quad &\quad + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
 &\quad + P(A \cap B \setminus C) + P(B \cap C \setminus A) + P(A \cap C \setminus B) \\
 &\quad + P(A \cap B \cap C)
 \end{aligned}$$

Hierin die Gleichungen (8), (9) und (10) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B \cup C) &= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
 &\quad + P(B) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
 &\quad + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
 &\quad + P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) \\
 &\quad + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
 &\quad + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
 &\quad + P(A \cap B \cap C)
 \end{aligned}$$

Die Vereinfachung ergibt in der Tat den Additionssatz für die Wahrscheinlichkeiten von drei nicht disjunkten Ereignissen:

$$(18) \quad P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Man kann sich vorstellen, dass der Beweis des Additionssatzes für mehr als drei Ereignisse noch komplizierter und umständlicher ist. Deswegen wird an dieser Stelle auf die Siebformel von Sylvester-Poincaré (nach James Sylvester und Jules Henri Poincaré) zurückgegriffen. Die Siebformel, auch Einschluss-Ausschluss-Formel genannt, beschreibt den gesuchten Zusammenhang für n Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit, dass von n beliebigen Ereignissen A_i ($i = 1 \dots n$) mindestens eines eintritt, ist:

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_i P(A_i) \\
 &\quad - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) \\
 &\quad + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\
 &\quad - \sum_{i < j < k < l} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) \\
 &\quad + \\
 &\quad \dots \\
 &\quad - \\
 &\quad + (-1)^{n-1} \cdot P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)
 \end{aligned}$$

wobei:

$$i, j, k, l, \dots \in \mathbb{N}$$

$$i = 1 \dots n; n \geq i$$

$$j = 2 \dots n; n \geq j$$

$$k = 3 \dots n; n \geq k$$

$$l = 4 \dots n; n \geq l$$

⋮

Der Additionssatz und der Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten

Um das Einschluss-Ausschluss-Prinzip deutlich zu machen, wird die Siebformel hier explizit für $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$ angegeben. Wenn n einen dieser Werte annimmt, ist der letzte Term

$$+(-1)^{n-1} \cdot P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

bereits enthalten. So gilt für $n = 2$

$$+(-1)^{2-1} \cdot P\left(\bigcap_{i=1}^2 A_i\right) = -P(A_1 \cap A_2)$$

Dieser Ausdruck ergibt sich aber bereits aus dem zweiten Term der Siebformel. Für $n = 2$ lautet die allgemeine Formulierung der Siebformel nur

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j)$$

Hierin $i = 1, 2$ und $j = 2$ eingesetzt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^2 A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Dies ist der Additionssatz für zwei beliebige Ereignisse. Der letzte Term der allgemeinen Siebformel

$$+(-1)^{n-1} \cdot P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

ist hier mit $P(A_1 \cap A_2)$ bereits erreicht, denn es gilt

$$+(-1)^{2-1} \cdot P\left(\bigcap_{i=1}^2 A_i\right) = -P(A_1 \cap A_2)$$

Für $n = 2$ ist der letzte Term der allgemeinen Formel redundant. Das Gleiche gilt für $n = 3$ und $n = 4$. Der Term wird sozusagen erst gebraucht für $n > 4$ (wohlgemerkt in der hier angegebenen Fassung der Siebformel).

Der Einschluss und Ausschluss wird solange fortgeführt, bis mit den konkreten Zahlen der Ausdruck

$$+(-1)^{n-1} \cdot P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

erreicht ist.

Die Siebformel gilt für beliebige Ereignisse, also auch für disjunkte Ereignisse. Wenn aber alle Ereignisse disjunkt sind, kann keine wie auch immer geartete Kombination von Ereignissen eintreten. Alle Wahrscheinlichkeiten für das gemeinsame Eintreten von Ereignissen sind gleich null, und die Siebformel reduziert sich auf den Additionssatz für paarweise disjunkte Ereignisse:

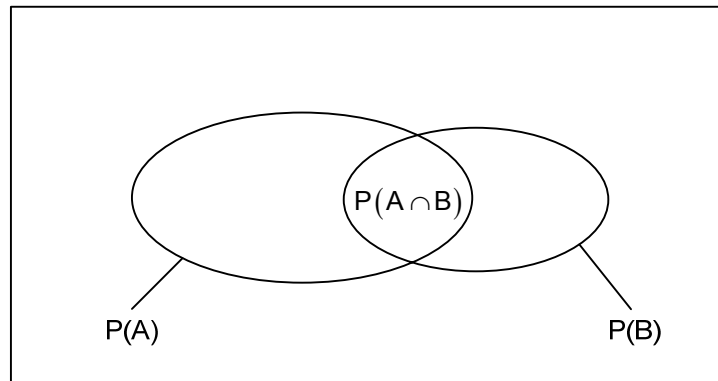
$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Im Folgenden wird aber weiter davon ausgegangen, dass die Ereignisse nicht disjunkt sind, dass sie gemeinsam eintreten können.

Hier stellt sich nämlich die bisher nicht behandelte Frage, wie die Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Eintretens von Ereignissen bestimmt werden kann. Wenn die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Eintreten der Ereignisse A und B als $P(A \cap B)$ definiert wird, ist damit bereits vorgegeben, wie groß diese Wahrscheinlichkeit ist. Betrachtet man noch einmal das Venn-Diagramm

Der Additionssatz und der Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeiten nicht disjunkter Ereignisse, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Eintreten von A und B durch die Größe der Fläche $P(A \cap B)$ bereits festgelegt:



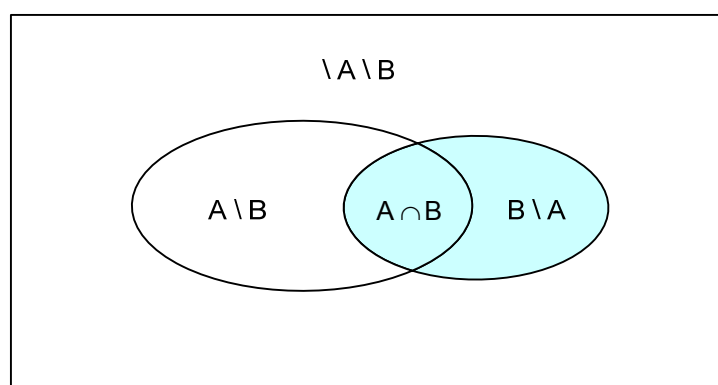
Wahrscheinlichkeiten nicht disjunkter Ereignisse

Der Anteil der Fläche $P(A \cap B)$ an der Fläche des gesamten Ereignisraumes ist die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Eintreten der Ereignisse A und B. Die Fläche des Ereignisraumes, die Menge aller möglichen Elementarereignisse, wird stets mit 1 gleichgesetzt (Normierung).

Wenn nun das gemeinsame Eintreten der Ereignisse A und B betrachtet wird, so heißt „gemeinsam“ nicht unbedingt „simultan“, sondern dass sie das Ergebnis *einer* Durchführung des Zufallsexperiments sind. Da nun A und B zwei Ereignisse darstellen, die gemeinsam eintreten können, handelt es sich um einen mehrstufigen Zufallsprozess, in diesem Fall um einen zweistufigen.

Nach der ersten Stufe des Zufallsereignisses ist eines der Ereignisse bereits eingetreten oder nicht. Da wir uns hier für das gemeinsame Eintreten der Ereignisse A und B interessieren, muss in der ersten Stufe eines dieser Ereignisse eingetreten sein, sonst gibt es kein gemeinsames Eintreten der Ereignisse A und B. Geht man nun davon aus, dass in der ersten Stufe das Ereignis B bereits eingetreten ist, dann lautet die Frage nach $P(A \cap B)$: Wie wahrscheinlich ist es, dass A eintritt, nachdem B bereits eingetreten ist? Eine solche Wahrscheinlichkeit nennt man eine bedingte Wahrscheinlichkeit und schreibt $P(A | B)$. $P(A | B)$ ist die Wahrscheinlichkeit für A, nachdem B bereits eingetreten ist.

Wenn dies nun so ist, dann gilt für das Ereignis A und B ein neuer, eingeschränkter Ereignisraum. Beide Ereignisse müssen nämlich im Ereignisraum B liegen. Der Fall, dass B nicht eintritt, interessiert nicht mehr:

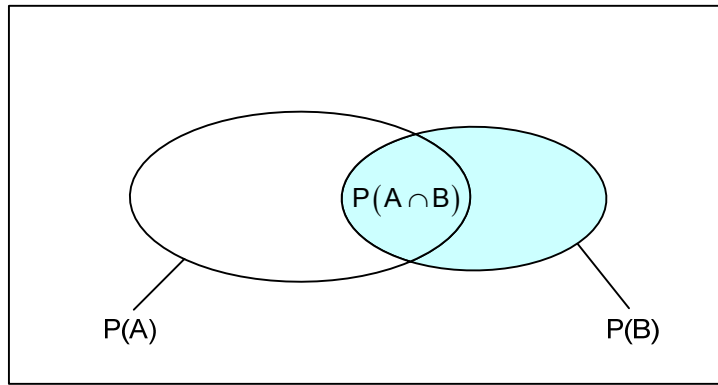


Ereignisraum bedingter Wahrscheinlichkeiten

In der Zeichnung muss das Ereignis $A \cap B$ in der eingefärbten Fläche $A \cap B + B \setminus A = B$ liegen. Dies ist der neue Ereignisraum. Da B bereits eingetreten ist, kann das Ereignis $\setminus B$ (außerhalb der eingefärbten Fläche) nicht mehr eintreten.

Der neue Ereignisraum im Venn-Diagramm dargestellt:

Der Additionssatz und der Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten



Venn-Diagramm bedingter Wahrscheinlichkeiten

Nach dem Eintritt von B ist der Ereignisraum auf $P(B)$ beschränkt. Die Wahrscheinlichkeit für A, nachdem B eingetreten ist, muss in diesem Raum liegen. Für das zusätzliche Eintreten des Ereignisses A gilt dann nur noch die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$, die in dieser Fläche liegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, nachdem B eingetreten ist, wird dann, wie immer in einem Venn-Diagramm, durch den Anteil der Fläche für diese Wahrscheinlichkeit an der Wahrscheinlichkeit des gesamten Ereignisraumes, hier $P(B)$, gegeben. Mit anderen Worten: Die bedingte Wahrscheinlichkeit für A, nachdem B eingetreten ist, wird definiert durch

$$(19) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Hieraus folgt unmittelbar der Multiplikationssatz für die Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Eintretens von zwei Ereignissen:

$$(20) \quad P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Ereignisse A und B gemeinsam eintreten, ist das Produkt der Wahrscheinlichkeit für B und der bedingten Wahrscheinlichkeit für A, nachdem B eingetreten ist.

Betrachten wir folgendes Beispiel: Das Ereignis A sei die richtige Vorhersage der 6 Gewinnzahlen im Lotto, das Ereignis B die Vorhersage der richtigen Superzahl, und das gemeinsame Eintreten der Ereignisse A und B das Knacken des Jackpots.

Die Wahrscheinlichkeit, 6 Zahlen aus 49 richtig vorherzusagen, ist

$$P(A) = \frac{1}{13.983.816}$$

Die Wahrscheinlichkeit, von 10 Ziffern die richtige vorherzusagen, ist

$$P(B) = \frac{1}{10}$$

Wenn nun ein Lottospieler die Ziehung der Lottozahlen im Fernsehen beobachtet und erfreut feststellt, dass er 6 Richtige hat, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, auch noch den Jackpot zu knacken? Intuitiv würde man sagen: Jetzt fehlt nur noch die richtige Superzahl, und dafür ist die Chance 1 : 10. Wenn man also schon weiß, dass die richtigen 6 aus 49 gezogen wurden, dann ist die Wahrscheinlichkeit, auch noch den Jackpot zu gewinnen, $1/10$.

Mathematisch-statistisch gesehen muss man für die Antwort auf diese Frage eine bedingte Wahrscheinlichkeit entsprechend Gleichung (19) bestimmen. Die Frage lautet jetzt: Wie wahrscheinlich ist es, dass Ereignis B eintritt, nachdem A bereits eingetreten ist, also

$$(21) \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Der Additionssatz und der Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten

$$P(B | A) = \frac{1}{10}$$

Gesucht ist aber die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Eintreten der Ereignisse A und B, die sich aus der Umstellung der Gleichung für die bedingte Wahrscheinlichkeit zum Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten ergibt. Aus Gleichung (21) folgt

$$(22) \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Ereignisse A und B gemeinsam eintreten, ist das Produkt der Wahrscheinlichkeit für A und der bedingten Wahrscheinlichkeit für B, nachdem A eingetreten ist.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{13.983.816} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{139.838.160}$$

Die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto 6 aus 49 den Jackpot zu gewinnen, ist 1 : 139.838.160.

Natürlich muss sich dies auch aus Gleichung (20) ergeben, denn für den Gewinn des Jackpots kommt es nicht darauf an, ob die Superzahl tatsächlich nach den Lottozahlen gezogen wird oder vorher; es gilt

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{13.983.816} = \frac{1}{139.838.160}$$

Man kann an diesem Beispiel eine weitere Eigenschaft von Ereignissen erkennen, nämlich die Abhängigkeit und die Unabhängigkeit voneinander. Es ist ja ganz offensichtlich so, dass die Wahrscheinlichkeit, 6 Richtige zu haben, unabhängig davon ist, ob eine bestimmte Superzahl gezogen wird, das heißt, es gilt

$$(23) \quad P(A | B) = P(A)$$

Wenn die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis A unabhängig davon ist, ob ein anderes Ereignis B eingetreten ist oder nicht, dann nennt man das Ereignis A unabhängig von B.

Auch die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen der Superzahl ist unabhängig davon, welche Gewinnzahlen vorher gezogen worden ist, das heißt

$$(24) \quad P(B | A) = P(B)$$

Das Ereignis A ist hier also unabhängig von B, und das Ereignis B ist unabhängig von A. Die beiden Ereignisse sind wechselseitig unabhängig voneinander.

Setzt man nun (23) in (20) oder (24) in (22) ein, erhält man den Multiplikationssatz für zwei wechselseitig unabhängige Ereignisse:

$$(25) \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Eintreten von zwei wechselseitig unabhängigen Ereignissen ist das Produkt ihrer Wahrscheinlichkeiten.

Das Ereignis „Knacken des Jackpots“ ist dagegen abhängig davon, ob die richtigen Gewinnzahlen gezogen werden und natürlich, ob die richtige Superzahl gezogen wird. Bezeichnet man das Ereignis „Knacken des Jackpots“ zur Vereinfachung und zur Verallgemeinerung als Ereignis C, dann gilt

$$P(C) = \frac{1}{139.838.160}$$

Der Additionssatz und der Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten

$$P(C|A) = \frac{1}{10}$$

$$P(C|B) = \frac{1}{13.983.816}$$

$$(26) \quad P(C) \neq P(C|A) \neq P(C|B)$$

Das Ereignis C ist sowohl vom Ereignis A abhängig als auch vom Ereignis B.

Für mehr als zwei Ereignisse – das hier definierte Ereignis C setzt sich ja lediglich aus den zwei Ereignissen A und B zusammen – sind die Verhältnisse komplizierter. Es liegt zwar die Vermutung nahe, dass die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Eintreten von beliebig vielen unabhängigen Ereignissen das Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist, aber eine Vermutung ist kein Beweis.

Ausgangspunkt des Beweises ist der Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten gemäß Gleichung (22). Es wird hier gesetzt:

$$A = A_1$$

$$B = A_2$$

Dies in Gleichung (22) eingesetzt:

$$(27) \quad P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1)$$

Nunmehr wird gesetzt:

$$A = A_1 \cap A_2$$

$$B = A_3$$

Dies in Gleichung (22) eingesetzt:

$$(28) \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

Der Ausdruck $P(A_1 \cap A_2)$ in dieser Gleichung wird ersetzt durch die rechte Seite von (27), sodass:

$$(29) \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

Die Ereignisse

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

$$B = A_4$$

in (22) eingesetzt:

$$(30) \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Hierin die rechte Seite der vorhergehenden Gleichung (29) eingesetzt:

$$(31) \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Man erkennt an der Entwicklung der Gleichungen (27), (29) und (31), dass jedes weitere Ereignis den Faktor $P(\text{weiteres Ereignis} | \text{alle bisherigen Ereignisse})$ hinzufügt. Für n Ereignisse ergibt sich die Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Eintretens demzufolge mit

$$(32) \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots \cdot P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_{n-1})$$

Dies ist der Multiplikationssatz für das gemeinsame Eintreten von n beliebigen Ereignissen.

Der Additionssatz und der Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten

Wenn die Ereignisse alle unabhängig von den anderen sind, wenn also gilt

$$P(A_2 | A_1) = P(A_2)$$

$$P(A_3 | A_1 \cap A_2) = P(A_3)$$

$$P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_4)$$

⋮

$$P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_{n-1}) = P(A_n)$$

vereinfacht sich Gleichung (32) zum Multiplikationssatz für das gemeinsame Eintreten von n unabhängigen Ereignissen:

$$(33) \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \dots P(A_n)$$

oder, in alternativer Schreibweise:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$