Die Binomialverteilung als Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Schadenversicherung

Für das Modell einer Schadenversicherung sei gegeben:

s	=	Schaden eines Versicherungsnehmers, wenn der Schadenfall eintritt
w_s	=	Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Schadenfall eintritt
$1 - w_s$	=	Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Schadenfall nicht eintritt
n	=	Anzahl der Versicherungsnehmer
i	=	Anzahl der Versicherungsnehmer, die einen Schaden haben
$n - i$	=	Anzahl der Versicherungsnehmer, die keinen Schaden haben

Zu bestimmen ist

S	=	Gesamtschaden der Versicherungsunternehmung
w_u	=	Wahrscheinlichkeit für den Gesamtschaden der Versicherungsunternehmung

Der Schaden eines jeden Versicherungsnehmers im betrachteten Zeitraum sei entweder s oder null. Da jeder Versicherungsnehmer aufgrund dieser Annahme nur einen Schaden haben kann (wenn man so will, einen durchschnittlichen Schaden), ist i, die Anzahl der Versicherungsnehmer, die einen Schaden erleiden, gleich der Anzahl der Schäden insgesamt. Die Größe i ist null, wenn keiner der Versicherungsnehmer einen Schaden hat, und n, wenn alle Versicherungsnehmer einen Schaden haben. Dazwischen kann die Größe i alle ganzzahligen Werte annehmen. Der Gesamtschaden der Versicherungsunternehmung, die Versicherungsleistung insgesamt, ist also

(1) $$S = i \cdot s$$

Unter der Voraussetzung, dass der Schadeneintritt bei jedem Versicherungsnehmer unabhängig vom Schadeneintritt bei allen anderen Versicherungsnehmern ist, bestimmt sich die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt eines bestimmten Gesamtschadens nach folgender Formel:

(2) $$w_u = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot w_s^{\,i} \cdot (1 - w_s)^{n-i}$$

Die Funktion $w_u(i)$, welche diesen Zusammenhang für alle möglichen Werte von $i = 0 \dots n$ beschreibt, ist eine Binomialverteilung. Diese wird im Folgenden hergeleitet.

Hierzu ist es erforderlich, einige Zusammenhänge der Kombinatorik darzustellen. Die Kombinatorik ist ein Teilgebiet der Mathematik, welches sich mit der Auswahl von Elementen aus gegebenen Mengen befasst.

Ein wichtiger Satz der Kombinatorik ist die Produktregel, auch Fundamentalprinzip der Kombinatorik genannt. Es besagt:

Wenn ein Zufallsexperiment in k Schritten durchgeführt wird und die Anzahl der Möglichkeiten für den ersten Schritt m_1, für den zweiten Schritt m_2 und für den k. Schritt m_k beträgt, dann hat das Experiment

$$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \dots \cdot m_k$$

Möglichkeiten der Durchführung. Wird beispielsweise im ersten Schritt eine Münze geworfen und im zweiten Schritt ein Würfel, dann gibt es für das Ergebnis des Münzwurfs zwei Möglichkeiten, Kopf oder Zahl. Der Würfel kann auf sechs verschiedene Weisen fallen; und alle diese Möglichkeiten können miteinander kombiniert werden. Liegt also Kopf beim Münzwurf oben, kann dieses Ergebnis mit den 6 Ergebnissen des Würfelns zusammenfallen, das sind 6 Möglichkeiten. Liegt dagegen Zahl beim Münzwurf oben, kann auch dieses Ergebnis mit den 6 Möglichkeiten des Würfelns kombiniert werden, sodass es insgesamt 2 mal 6 Möglichkeiten gibt. Erweitert man das Experiment um eine neue Stufe, so können alle bisherigen Möglichkeiten mit der Anzahl der Möglichkeiten der neuen Stufe multipliziert werden, und so weiter. Dies ist eben das Prinzip der Multiplikation, wie es im Fundamentalprinzip der Kombinatorik zum Ausdruck kommt.

Wenn die Anzahl der Möglichkeiten in jeder Stufe gleich groß ist, wenn also gilt

$$m_1 = m_2 = m_3 \dots = m_k = m$$

dann ist die Anzahl der Möglichkeiten insgesamt nach dem Fundamentalprinzip der Kombinatorik

$$\underbrace{m \cdot m \cdot m \ldots \cdot m}_{\text{k Faktoren}} = m^k$$

Zum Beispiel gibt es bei „Wer wird Millionär?“ 15 Fragen mit jeweils 4 möglichen Antworten – das sind insgesamt

$$4^{15} = 1.073.741.824$$

verschiedene Möglichkeiten, die Fragen zu beantworten. Falls sich jemand entschließt, alle Fragen ohne jede Ahnung (und ohne den 50:50-Joker) nach dem Zufallsprinzip zu beantworten, dann ist die Wahrscheinlichkeit, die richtige Antwortkette zu treffen, ziemlich klein, genau genommen

$$\frac{1}{1.073.741.824}$$

Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit, 6 Richtige im Lotto zu haben, deutlich höher.

Wenn eine Versicherungsunternehmung n Versicherungsnehmer hat, die jeder zwei Möglichkeiten hinsichtlich des Schadeneintritts aufweisen (Schaden ja oder Schaden nein), dann gibt es 2^n Möglichkeiten für den Eintritt dieser Schäden und damit 2^n Möglichkeiten für den Gesamtschaden. Für eine überschaubare Anzahl von Versicherungsnehmern, zum Beispiel für $2^3 = 8$ oder $2^4 = 16$ lassen sich diese Fälle noch einzeln aufführen. Bei einer realistischen Zahl von Versicherungsnehmern ist diese Methode der vollständigen Enumeration zu aufwendig. Da benötigt man andere Instrumente.

Ein weiteres dieser Instrumente ist die Permutation. Gegeben sei eine Menge von n Elementen. Dann heißt eine Zusammenstellung aller dieser Elemente in einer beliebigen Reihenfolge eine Permutation. Zum Beispiel lassen sich aus der Menge {a, b, c} folgende 6 Permutationen bilden:

abc
acb
bac
bca
cab
cba

Wenn n größer wird, steigt die Zahl der möglichen Permutationen schnell an. So hat die Menge {a, b, c, d} bereits 24 Permutationen, die hier nicht alle aufgeführt werden.

Offensichtlich hängt die Anzahl der möglichen Permutationen von der Anzahl der Elemente ab. Für eine Permutation von n Elementen gibt es insgesamt n Plätze, die von den einzelnen Elementen besetzt werden können. So besetzt in der Permutation abc das Element a den ersten Platz, das Element b den zweiten Platz und das Element c den dritten Platz. Bei n Elementen gibt es für die Besetzung des ersten Platzes n Möglichkeiten, denn jedes der Elemente kann ausgewählt werden. Für die Besetzung des zweiten Platzes gibt es eine Möglichkeit weniger, also (n – 1) Möglichkeiten, da eines der Elemente den ersten Platz schon besetzt hat. Entsprechend sind es beim dritten Platz nur noch (n – 2) Möglichkeiten, und so verringert sich die Zahl der Möglichkeiten mit jedem besetzten Platz um 1. Für die Besetzung des letzten Platzes ist nur noch ein Element übrig, für das es nur noch einen Platz gibt, den letzten eben.

Alle diese Möglichkeiten der Anordnung sind miteinander zu kombinieren. Nach dem Fundamentalprinzip der Kombinatorik ist die Zahl der möglichen Anordnungen das Produkt der einzelnen Möglichkeiten. Die Zahl der möglichen Permutationen ist also

$${}_nP = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Dieses Produkt kann auch nach aufsteigendem Wert der Faktoren angeordnet werden:

$${}_nP = 1 \cdot 2 \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen wird geschrieben als n! (gesprochen „n Fakultät“):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n$$

Zum Beispiel ist

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Für n = 1 und n = 0 wird gesetzt

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$

Die Anzahl der Permutationen von n Elementen kann nun auch so geschrieben werden:

$${}_nP = n!$$

Wenn sich unter den n Elementen eine gewisse Anzahl gleichartiger Elemente befindet, dann können die einander gleichen Elemente zwar ebenfalls unterschiedlich angeordnet werden, sie können also ebenfalls Permutationen bilden, aber diese Permutationen sind nicht mehr unterscheidbar. So lassen sich die Elemente der Menge {a, a, a} auf $3! = 6$ verschiedene Weisen anordnen, aber jede der Permutationen aaa ist nicht von den anderen zu unterscheiden. In der Gesamtzahl von n! Permutationen sind die Permutationen gleichartiger Elemente aber enthalten.

Man muss sich nun fragen, ob die Permutationen der gleichartigen Elemente bei der Ermittlung der Gesamtzahl der möglichen Permutationen überhaupt mitgezählt werden sollen. Wenn beispielsweise das Element a eine Schadenmeldung eines Versicherungsnehmers in einer bestimmten Höhe darstellt und die Menge {a, a, a} die gleichartigen Schadenmeldungen von drei verschiedenen Versicherungsnehmern enthält, dann kommt es für den Gesamtschaden der Versicherungsunternehmung nicht darauf an, in welcher Reihenfolge der Schadensachbearbeiter diese Schadenmeldungen auf seinem Schreibtisch anordnet. Es kommt zwar auf die Anzahl der Schadenfälle und der Nicht-Schadenfälle an, also auf die Anzahl der unterschiedlichen Fälle, aber nicht auf die Anzahl der Permutationen gleichartiger Elemente. Man muss die Anzahl der unterscheidbaren Permutationen ermitteln.

Sei n_1 die Anzahl gleicher Elemente in der Menge n. Dann enthält die Anzahl aller möglichen Permutationen ${}_nP = n!$ als Teilmenge die nicht unterscheidbaren Permutationen ${}_{n1}P = n_1!$. Wenn die unterscheidbaren Permutationen als ${}_nP_{n1}$ bezeichnet werden, besteht zwischen ${}_nP$, ${}_{n1}P$ und ${}_nP_{n1}$ folgender Zusammenhang: die unterscheidbaren Permutationen sind mögliche Anordnungen, die nicht unterscheidbaren Permutationen sind mögliche Anordnungen. Die Kombination beider möglicher Anordnungen sind *alle* möglichen Anordnungen, die unterscheidbaren und die nicht unterscheidbaren. Nach dem Fundamentalprinzip der Kombination ist die Kombination möglicher Anordnungen ihr Produkt, sodass also die unterscheidbaren Permutationen mit den nicht unterscheidbaren Permutationen multipliziert die Gesamtzahl der möglichen Permutationen ergibt. Es gilt also

$$\underbrace{\text{Unterscheidbare Permutationen}}_{{}_nP_{n1}} \cdot \underbrace{\text{Nicht unterscheidbare Permutationen}}_{{}_{n1}P = n_1!} = \underbrace{\text{Alle Permutationen}}_{{}_nP = n!}$$

oder, mit den verwendeten Symbolen:

$${}_nP_{n1} \cdot {}_{n1}P = {}_nP$$

Da ${}_nP = n!$ und ${}_{n1}P = n_1!$ ist auch

$${}_nP_{n1} \cdot n_1! = n!$$

Hieraus folgt für die Anzahl der unterscheidbaren Permutationen von n Elementen, unter denen sich n_1 gleiche Elemente befinden:

$${}_nP_{n1} = \frac{n!}{n_1!}$$

Die Binomialverteilung als Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Schadenversicherung

Wenn sich unter den n Elementen eine weitere Gruppe gleichartiger Elemente n_2 befindet, können diese n_2! nicht unterscheidbare Permutationen bilden. Diese neu hinzukommende Anzahl möglicher Anordnungen muss mit den bisherigen multipliziert werden, um die Gesamtzahl aller möglicher Permutationen zu erhalten. Wird die Anzahl der unterscheidbaren Permutationen in diesem Fall mit ${}_nP_{n1,n2}$ bezeichnet, so gilt nach dem Fundamentalprinzip der Kombinatorik

$$\underbrace{\text{Unterscheidbare Permutationen}}_{{}_nP_{n1,n2}} \cdot \underbrace{\text{Nicht unterscheidbare Permutationen des Typs 1}}_{{}_{n1}P = n_1!} \cdot \underbrace{\text{Nicht unterscheidbare Permutationen des Typs 2}}_{{}_{n2}P = n_2!} = \underbrace{\text{Alle Permutationen}}_{{}_nP = n!}$$

oder, in Symbolen:

$${}_nP_{n1,n2} \cdot n_1! \cdot n_2! = n!$$

Hieraus folgt für die Anzahl der unterscheidbaren Permutationen von n Elementen, unter denen sich n_1 und n_2 jeweils gleiche Elemente befinden

$${}_nP_{n1,n2} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2!}$$

Wenn sich unter den n Elementen n_1, $n_2 \ldots n_g$ gleiche Elemente befinden, gilt für die unterscheidbaren Permutationen entsprechend

$${}_nP_{n1\ldots ng} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots \cdot n_g!}$$

Welche Permutationen sind nun für die Schadenversicherung von Bedeutung?

In der hier betrachteten Versicherungsunternehmung gibt es für jeden Versicherungsnehmer nur den Fall, dass entweder der Schaden s eintritt oder kein Schaden. Wird der Fall des Nichteintritts mit s_o bezeichnet, lassen sich die Ergebnisse des Schadenjahres als Permutation schreiben, zu der jeder der n Versicherungsnehmer genau ein Element beiträgt, entweder s oder s_o.

Beispielsweise gibt es bei 4 Versicherungsnehmern für alle Möglichkeiten des Schadeneintritts die folgenden unterscheidbaren Permutationen:

$$\begin{array}{c} ssss \\ sss\,s_o \\ ss\,s_o\,s \\ ss\,s_o\,s_o \\ s\,s_o\,ss \\ s\,s_o\,s\,s_o \\ s\,s_o\,s_o\,s \\ s\,s_o\,s_o\,s_o \\ s_o\,sss \\ s_o\,ss\,s_o \\ s_o\,s\,s_o\,s \\ s_o\,s\,s_o\,s_o \\ s_o\,s_o\,ss \\ s_o\,s_o\,s\,s_o \\ s_o\,s_o\,s_o\,s \\ s_o\,s_o\,s_o\,s_o \end{array}$$

Nur die Permutationen ssss (alle Versicherungsnehmer haben einen Schaden) und $s_os_os_os_o$ (kein Versicherungsnehmer hat einen Schaden) kommen jeweils einmal vor. Die Fälle mit jeweils einem Schaden, zwei Schäden oder drei Schäden sind dagegen mehrfach enthalten und müssten einzeln gezählt werden, um die Anzahl der möglichen Fälle mit einem, zwei oder drei Schäden zu erhalten.

Die Binomialverteilung als Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Schadenversicherung

Um die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Fallkonstellationen bestimmen zu können, wäre es zweckmäßig, die Anzahl der Permutationen, die jeweils gleich viele Schäden enthalten, in einem Arbeitsgang bestimmen zu können, anstatt sie aus einer Liste der vollständig aufgeführten Fälle herauszusuchen. Dafür ist das entwickelte Konzept der unterscheidbaren Permutationen geeignet. Hier enthalten die Permutationen nur zwei unterschiedliche Elemente, s oder s_o, Schaden oder kein Schaden. Für diesen Fall gilt die oben abgeleitete Formel

$$_nP_{n1,n2} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!}$$

Die Teilmengen n_1 und n_2 können beliebig groß sein, solange sie beide zusammen nicht n übersteigen. Da n_1 und n_2 sonst keine Teilmengen mehr sind, muss also gelten

$$n_1 + n_2 \leq n$$

Im Fall der Schadenversicherung allerdings gibt es keine anderen Elemente als s und s_o, das heißt, die beiden Teilmengen addieren sich gerade zu n. Es gilt

$$n_1 + n_2 = n$$

Eine Teilmenge besteht aus den i Schadenfällen, die andere besteht aus n – i Fällen, in denen kein Schaden auftritt. Beide Mengen sind die einzigen Teilmengen der n Elemente:

$$\overbrace{\underbrace{sssssss}_{\text{i Elemente}}\underbrace{s_os_os_os_os_os_os_os_o}_{\text{n−i Elemente}}}^{\text{n Elemente}}$$

Die Formel für die Anzahl der Permutationen von n Elementen, unter denen sich nur zwei Mengen gleicher Elemente befinden, lautet dann

$$_nP_{i,n-i} = \frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}$$

Für diese Sonderform der Permutationen ist auch die Bezeichnung als „Kombinationen" gebräuchlich. Mit dem Symbol $_nC_i$ (die Anzahl möglicher Kombinationen i. Ordnung aus n Elementen ohne Berücksichtigung der Anordnung) gilt also

$$_nC_i = \frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}$$

Den Ausdruck $\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}$ kann man abkürzend $\binom{n}{i}$ schreiben [gesprochen: „n über i"].

Mithilfe dieses Ausdrucks, des sogenannten Binomialkoeffizienten, kann man nun bestimmen, wie viele Fälle es gibt, in denen i Schäden auftreten. Dies muss man für jeden möglichen Wert von i ermitteln. Für das obige Beispiel ergibt sich:

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!\cdot 4!} = 1$$

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!\cdot 3!} = 4$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$$

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} = 1$$

Die Richtigkeit dieser Berechnungen lässt sich durch Abzählen in der obigen Liste der Permutationen überprüfen. Es gibt nur eine Permutation, in der s null Mal vorkommt, nämlich $s_o s_o s_o s_o$. Es gibt 4 Permutationen, in denen s einmal vorkommt, nämlich $ss_os_os_o$, $s_oss_os_o$, $s_os_oss_o$, $s_os_os_os$. So kann man mit dem Abzählen und Aufschreiben der einzelnen Permutationen fortfahren, aber eben das erspart einem das Konzept der Kombinationen. In einer jeden Kombination ist die vorgegebene Anzahl von Fällen enthalten, in denen i Mal s und (n – i) Mal s_o vorkommt. Mit der Anzahl dieser Kombinationen ${}_nC_i$ hat man die Anzahl der Fälle, in denen i Schäden eintreten und (n – i) Nichtschäden. Mehr braucht man für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten dieser Fälle nicht zu wissen.

In einer bestimmten Kombination, die i Mal s enthält und (n – i) Mal s_o, treten i Schäden gemeinsam auf. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Versicherungsnehmer den Schaden s erleidet, ist w_s. Diese Wahrscheinlichkeit ist unabhängig davon, ob irgendein anderer Versicherungsnehmer einen Schaden hat. Der Eintritt des Schadens ist ein vom Schadeneintritt bei anderen Versicherungsnehmern unabhängiges Ereignis. Die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Eintreten von unabhängigen Ereignissen ist nach dem Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten das Produkt ihrer Wahrscheinlichkeiten. Also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass i Versicherungsnehmer gemeinsam einen Schaden erleiden

$$\underbrace{w_s \cdot w_s \cdot w_s \ldots \cdot w_s}_{\text{i Faktoren}} = w_s^{\,i}$$

Die übrigen Elemente einer bestimmten Kombination sind die n – i Fälle, in denen der Schaden nicht eintritt. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Schaden bei einem Versicherungsnehmer nicht eintritt, ist $1 - w_s$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Schaden bei n – i Versicherungsnehmern unabhängig voneinander nicht eintritt, ist

$$\underbrace{(1-w_s)\cdot(1-w_s)\cdot(1-w_s)\ldots\cdot(1-w_s)}_{\text{n−i Faktoren}} = (1-w_s)^{n-i}$$

Die Ereignisse „i Versicherungsnehmer haben einen Schaden“ und „n – i Versicherungsnehmer haben keinen Schaden“ treten gemeinsam ein. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „i Versicherungsnehmer haben einen Schaden“ ist unabhängig von der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „n – i Versicherungsnehmer haben keinen Schaden“. Es handelt sich also um voneinander unabhängige Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Eintreten dieser Ereignisse ist nach dem Multiplikationssatz

$$w_s^{\,i} \cdot (1-w_s)^{n-i}$$

Dies nun ist die Wahrscheinlichkeit für *eine* der möglichen Kombinationen, die i Mal s und (n – i) Mal s_o enthalten. Nur eine von diesen Kombinationen kann tatsächlich eintreten. Wenn beispielsweise von den Kombinationen $ss_os_os_o$, $s_oss_os_o$, $s_os_oss_o$, $s_os_os_os$ eine eingetreten ist, können die anderen nicht mehr eintreten. Es kann also entweder die Kombination $ss_os_os_o$ oder $s_oss_os_o$ oder $s_os_oss_o$ oder $s_os_os_os$ eintreten. Die Kombinationen schließen sich gegenseitig aus; es handelt sich um disjunkte Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis oder ein anderes disjunktes Ereignis eintritt, ist die Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten; die Wahrscheinlichkeit, dass irgendein disjunktes Ereignis aus einer Anzahl von disjunkten Ereignissen eintritt, ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten dieser Anzahl. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgendeine der Kombinationen mit i Mal s und (n – i) Mal s_o eintritt

$$\underbrace{w_s^{\,i} \cdot (1-w_s)^{n-i} + w_s^{\,i} \cdot (1-w_s)^{n-i} + w_s^{\,i} \cdot (1-w_s)^{n-i} \ldots + w_s^{\,i} \cdot (1-w_s)^{n-i}}_{\text{Anzahl der Summanden = Anzahl der möglichen Kombinationen}}$$

Da die Summanden alle gleich sind, kann man die Summe auch ermitteln, indem man $w_s^{\,i} \cdot (1-w_s)^{n-i}$ mit der Anzahl der möglichen Kombinationen multipliziert.

Die Binomialverteilung als Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Schadenversicherung

Die Anzahl möglicher Kombinationen ist nun

$$ {}_nC_i = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} $$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass i Schäden (und n – i Nichtschäden) auftreten

$$ \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot {w_s}^i \cdot (1-w_s)^{n-i} $$

Die Wahrscheinlichkeit, dass i Schäden auftreten, ist aber nichts anderes als die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Gesamtschaden der Versicherungsunternehmung w_u, sodass

$$ w_u = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot {w_s}^i \cdot (1-w_s)^{n-i} $$

Dies ist Gleichung (2). Die Funktion für die Binomialverteilung lautet also in der Tat:

(3) $$ w_u(i) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot {w_s}^i \cdot (1-w_s)^{n-i} $$

Wendet man diese Funktion auf das Beispiel mit 4 Versicherungsnehmern an, so erhält man folgende Ergebnisse:

$$ w_u(i=0) = \frac{4!}{0! \cdot 4!} \cdot 0{,}1^0 \cdot (1-0{,}1)^4 = 0{,}6561 $$

$$ w_u(i=1) = \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot 0{,}1^1 \cdot (1-0{,}1)^3 = 0{,}2916 $$

$$ w_u(i=2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 0{,}1^2 \cdot (1-0{,}1)^2 = 0{,}0486 $$

$$ w_u(i=3) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 0{,}1^3 \cdot (1-0{,}1)^1 = 0{,}0036 $$

$$ w_u(i=4) = \frac{4!}{4! \cdot 0!} \cdot 0{,}1^4 \cdot (1-0{,}1)^0 = 0{,}0001 $$

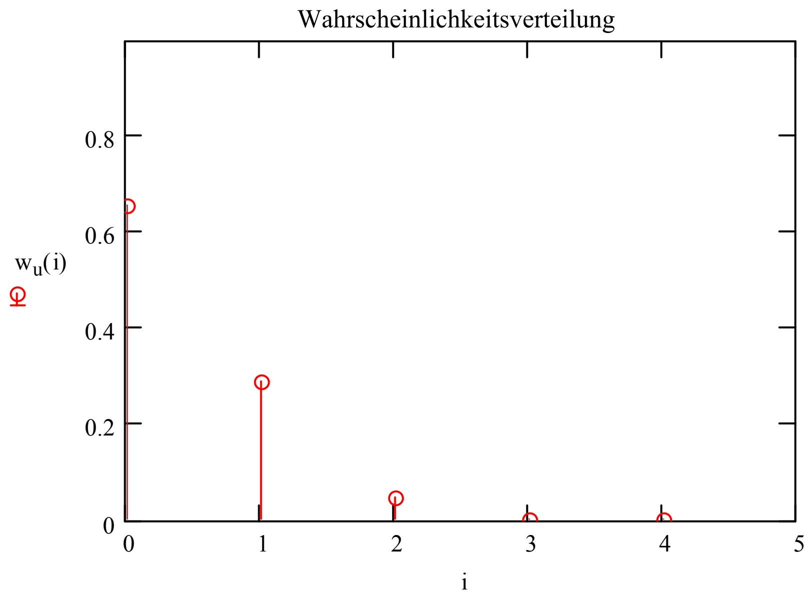
Die Addition der Wahrscheinlichkeiten ergibt

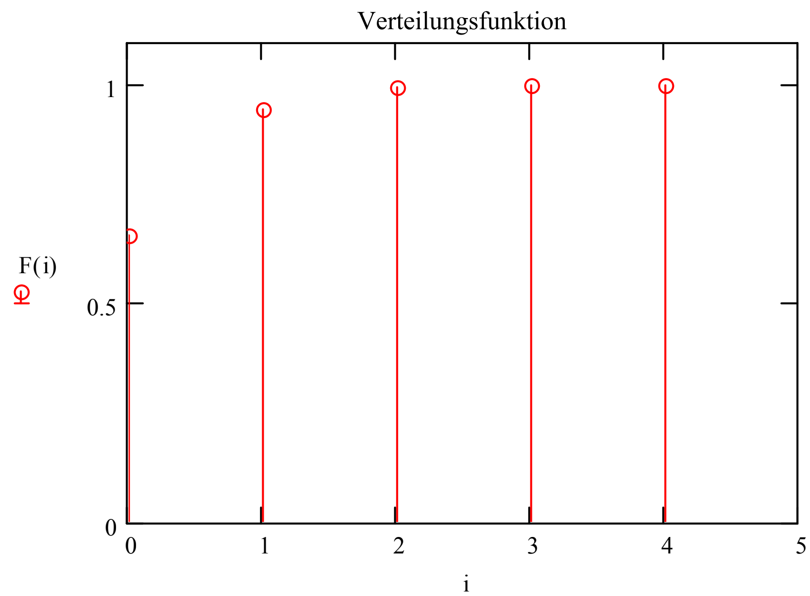
$$ w_u(i=0) + w_u(i=1) + w_u(i=2) + w_u(i=3) + w_u(i=4) = 0{,}6561 + 0{,}2916 + 0{,}0486 + 0{,}0036 + 0{,}0001 = 1 $$

womit die Wahrscheinlichkeitsverteilung vollständig erfasst wurde.

Grafisch ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsverteilung $w_u(i)$ und für die Verteilungsfunktion $F(i) = \sum_{i=0}^{i} w_u(i)$ mit den Daten des Beispiels folgendes Bild:

Die Binomialverteilung als Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Schadenversicherung





Für die praktische Anwendung der Binomialverteilung muss man bedenken, dass der Binomialkoeffizient

$$\frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}$$

bei größeren Werten von n leicht die Kapazität von Taschenrechnern und Computern übersteigt, wenn der Ausdruck schrittweise berechnet wird. Dann muss man zunächst den Ausdruck n! berechnen, und dieser Wert steigt mit größer werdendem n sehr rasch an.

Allerdings kann man den Binomialkoeffizienten vor der Berechnung vereinfachen. Betrachtet man beispielsweise den Ausdruck

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$$

und formuliert diesen explizit, dann sieht man, dass der Bruch gekürzt werden kann:

Die Binomialverteilung als Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Schadenversicherung

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!\cdot 3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} = 4$$

Dies gilt grundsätzlich, denn im Zähler des Binomialkoeffizienten steht der Ausdruck

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n$$

und im Nenner

$$(n-i)! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot(n-i)!$$

Da $i \leq n$ (es können aus n Elementen nicht mehr als n Elemente ausgewählt werden), ist der Ausdruck $(n - i)!$ in jedem Fall sowohl im Zähler als auch im Nenner als Faktor vorhanden und kann weggekürzt werden. Für den Binomialkoeffizienten ergibt sich dann allerdings der unelegante Ausdruck

$$\frac{(n-i+1)\cdot(n-i+2)\ldots\cdot n}{i!}$$

Mithilfe dieser Vereinfachung kann man aber auch größere Binomialkoeffizienten leichter ausrechnen. So ist die Anzahl der Möglichkeiten, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge 6 Zahlen aus 49 zu ziehen

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\cdot 43!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot 43\cdot 44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49}{6!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot 43} = \frac{44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49}{6!} = 13.983.816$$

Dreht man im letzten Bruch die Faktoren um, kann man erkennen, dass die Anzahl der möglichen Kombinationen, 6 Zahlen aus 49 zu ziehen, auch auf recht einfache Weise abgeleitet werden kann:

$$\frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{6!}$$

Es gibt 49 Möglichkeiten, die erste Zahl zu ziehen. Für die zweite Zahl gibt es eine Möglichkeit weniger, also 48 usw. bis zur sechsten Zahl. Alle diese Möglichkeiten können miteinander kombiniert werden, die gesamte Zahl der Möglichkeiten ist also das Produkt der Zahlen von 44 bis 49. In dieser Zahl der Möglichkeiten ist die Anzahl der Möglichkeiten, die 6 Gewinnzahlen unterschiedlich anzuordnen, aber enthalten. Jedoch kommt es auf die Reihenfolge, in der die Gewinnzahlen gezogen werden, nicht an. Für die Anordnung der 6 Gewinnzahlen gibt es 6! Möglichkeiten, und um diesen Faktor ist die Anzahl der Ziehungsmöglichkeiten zu verkleinern, indem nach dem Fundamentalprinzip der Kombinatorik durch den Faktor geteilt wird.

Möchte man seine Binomialverteilung am Computer selbst bauen, muss man diese Vereinfachung nicht vornehmen. Man kann hier stattdessen die eingebauten Funktionen verwenden. So steht in Excel die Funktion KOMBINATIONEN(n;i) zur Verfügung und in Mathcad die Funktion combin(n,i).

Trotz aller Vereinfachungen wird eine Binomialverteilung bei größeren Werten von n schnell unübersichtlich. Deswegen sind Kennzahlen entwickelt worden, mit denen man Wahrscheinlichkeitsverteilungen charakterisieren kann, ohne die Verteilung insgesamt darzustellen. Diese Kennzahlen sind der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung.

Allgemein ist der Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen (das ist eine Variable, die endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte annehmen kann) die Summe aller mit ihren Wahrscheinlichkeiten gewichteten möglichen Ausprägungen der Zufallsvariablen. Bezeichnet man mit $P(X = x_i)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X den Wert x_i annimmt, dann ist der Erwartungswert E(X), für den man auch μ schreibt:

(4) $$E(X) = \mu = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i)$$

Angewendet auf die Modellversicherung und auf einen einzigen Versicherungsnehmer, ist der Erwartungswert des Schadens

$$s \cdot w_s + 0 \cdot (1 - w_s) = s \cdot w_s$$

Wenn eine Versicherungsunternehmung nur diesen einzigen Versicherungsnehmer hat, ist der Erwartungswert ihres Gesamtschadens natürlich mit dem Erwartungswert des Einzelschadens identisch. Die Frage ist, wie sich der Erwartungswert des Gesamtschadens verändert, wenn die Anzahl der Versicherungsnehmer erhöht wird. Es liegt zwar die Vermutung nahe, dass der zusätzliche Erwartungswert des Einzelschadens einfach addiert werden kann, aber ein Beweis ist das nicht. Für zwei Versicherungsnehmer lässt sich indessen noch eine vollständige Enumeration der möglichen Fälle durchführen, und man erhält für den Erwartungswert des Schadens von zwei gleichartigen Versicherungsnehmern:

$$\begin{aligned}
&(s+s) \cdot w_s \cdot w_s + (s+0) \cdot w_s \cdot (1-w_s) + (0+s) \cdot (1-w_s) \cdot w_s + (0+0) \cdot (1-w_s) \cdot (1-w_s) \\
&= 2s \cdot w_s^{\,2} + s \cdot w_s - s \cdot w_s^{\,2} + s \cdot w_s - s \cdot w_s^{\,2} \\
&= 2s \cdot w_s
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert des Gesamtschadens erhöht sich also wie vermutet um den Erwartungswert des zusätzlichen Einzelschadens. Man kann zeigen, dass folgender Additionssatz für Erwartungswerte gilt: Sei E(X) der Erwartungswert einer Zufallsvariablen X und E(Y) der Erwartungswert einer anderen Zufallsvariablen Y, dann ist der Erwartungswert der gemeinsamen Zufallsvariablen $X + Y$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Die Erwartungswerte der Schäden weiterer Versicherungsnehmer können also einfach zum Erwartungswert des Gesamtschadens der Versicherungsunternehmung addiert werden. Der Erwartungswert des Gesamtschadens von n gleichartigen Versicherungsnehmern ist somit

(5) $$\mu = n \cdot s \cdot w_s$$

Die Varianz nun ist der Erwartungswert der quadrierten Abweichungen der Zufallsvariablen vom Erwartungswert μ. Es gilt folgende Definition der Varianz Var(X) oder σ^2:

(6) $$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

Die Varianz der Schadensverteilung eines Versicherungsnehmers ist mit $\mu = s \cdot w_s$ nach dieser Definition

$$\begin{aligned}
&(s - s \cdot w_s)^2 \cdot w_s + (0 - s \cdot w_s)^2 \cdot (1 - w_s) \\
&= \left(s^2 - 2s^2 \cdot w_s + s^2 \cdot w_s^{\,2}\right) \cdot w_s + s^2 \cdot w_s^{\,2} \cdot (1 - w_s) \\
&= s^2 \cdot w_s - 2s^2 \cdot w_s^{\,2} + s^2 \cdot w_s^{\,3} + s^2 \cdot w_s^{\,2} - s^2 \cdot w_s^{\,3} \\
&= s^2 \cdot w_s - s^2 \cdot w_s^{\,2} \\
&= s^2 \cdot w_s \cdot (1 - w_s)
\end{aligned}$$

Für die Summe von Varianzen gilt der Additionssatz

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

wenn die Zufallsvariablen unabhängig voneinander sind, was hier der Fall ist. Die Varianzen für n Versicherungsnehmer können also addiert werden, sodass für die Varianz des Gesamtschadens gilt

(7) $$\sigma^2 = n \cdot s^2 \cdot w_s \cdot (1 - w_s)$$

Die Standardabweichung ist die positive Quadratwurzel aus der Varianz, sodass

(8) $$\sigma = s \cdot \sqrt{n \cdot w_s \cdot (1 - w_s)}$$